2025　東京大学　文科　数学　解答例

第 1 問

(1)　放物線 $C : y = x^2$ について，$y' = 2x$ であるから，点 P における C の接線の傾きは $2a\ (\fallingdotseq 0)$ であるので，l の傾きは $-\dfrac{1}{2a}$ である．したがって，l の方程式は

$$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x-a)$$

$$y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

である．①と放物線 C の方程式を連立して y を消去すれば

$$x^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

$$(x-a)\left(x + a + \frac{1}{2a}\right) = 0$$

より，$x = a,\ -a - \dfrac{1}{2a}$ を得るが，Q の x 座標は P の x 座標 a と異なるので，$-a - \dfrac{1}{2a}$ である．

(2)　$a + \dfrac{1}{2a} = b \quad \cdots ②$

とおく．(1) の結果において，a を $-b$ と置き換えることで，R の x 座標は $b + \dfrac{1}{2b}$ である．この最小値を求めればよい．まず，b のとり得る値の範囲について考える．$a > 0,\ \dfrac{1}{2a} > 0$ より，②について相加平均と相乗平均の大小関係より

$$b \geqq a + \frac{1}{2a} \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{2a}} = \sqrt{2}$$

である．等号は $a = \dfrac{1}{2a}$，つまり，$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき成立する．また，a が大きくなるとき，b はいくらでも大きくなるので，b は $\sqrt{2}$ 以上のすべての実数をとる．

次に，$k = b + \dfrac{1}{2b}$ のとり得る値の範囲を考える．

$$k = b + \frac{1}{2b} \iff b^2 - kb + \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots ③$$

より，③を b の 2 次方程式と見たときに，$b \geqq \sqrt{2}$ である実数解を少なくとも一つもつような k の条件を求めればよい．すなわち

$$f(b) = b^2 - kb + \frac{1}{2} = \left(b - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + \frac{1}{2}$$

とおいて，下に凸の放物線 $y = f(b)$ が b 軸の $b \geqq \sqrt{2}$ の部分と交わる条件を考える．

$f(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ に注意すると，グラフの頂点の y 座標が 0 以下，すなわち

$$-\frac{k^2}{4} + \frac{1}{2} \leqq 0$$

$$k \leqq -\sqrt{2},\ \sqrt{2} \leqq k$$

のもとで，「$\dfrac{k}{2} \geqq \sqrt{2}$ かつ $f(\sqrt{2}) \geqq 0$」または「$f(\sqrt{2}) \leqq 0$」であればよい．これより

「$k \geqq 2\sqrt{2}$ かつ $k \leqq \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$」または「$k \geqq \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$」

つまり $k \geqq \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ である．よって，求める最小値は $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ である．

第 2 問

以下，点 A，B，C を中心とし，半径が s の円をそれぞれ S_A，S_B，S_C，半径が t の円をそれぞれ T_A，T_B，T_C とする．

(1)　△ABC は正三角形である．このとき，S_A と S_B は AB の中点で接する状況であるから (図 1)

$$s = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \frac{1}{2}$$

である．また，T_A は △ABC の外心を通る．すなわち t は外接円の半径となるから (図 2)

$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

である．

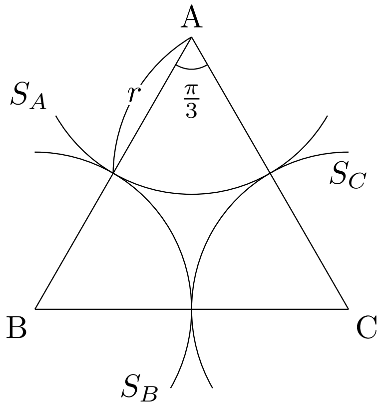


図 1

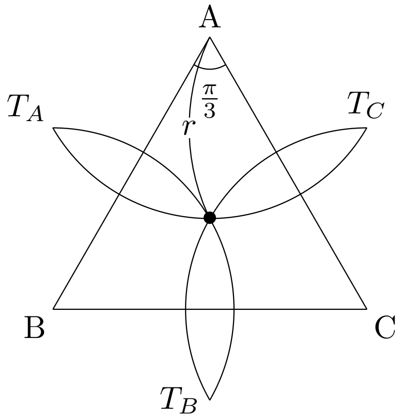


図 2

(2)　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，A から線分 BC におろした垂線の足を H とすると，AH $<$ BH より，S_A と S_B の交点のうち，一方が BC 上にある状況である (図 3)．この点を D とおく．

$\angle\mathrm{ABD}=\dfrac{\pi}{6}$ であり，△DAB は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{BD}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{AB}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

であり

$$s=\mathrm{BD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

である．

また，条件より，$s\leqq t$ であり，図 3 は t の条件も満たすから

$$t=s=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

である．

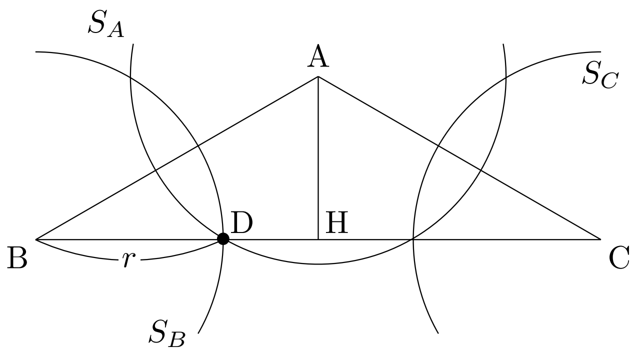


図 3

(3)　$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ のとき，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$ であり

$$\mathrm{BC}=2\left(\mathrm{AB}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right)=2\sin\frac{\theta}{2}$$

である．

(i)　$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\mathrm{BC}\leqq\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である．このとき，S_A と S_B は AB の中点で接する状況であるから (図 4)

$$s=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}$$

である．また，T_A は △ABC の外心を通る．すなわち t は外接円の半径となるから (図 5)

$$t=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\sin\theta}=\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

である．

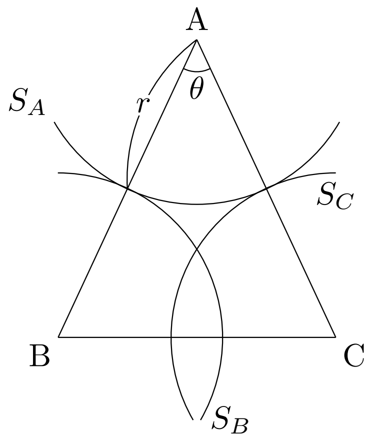


図 4

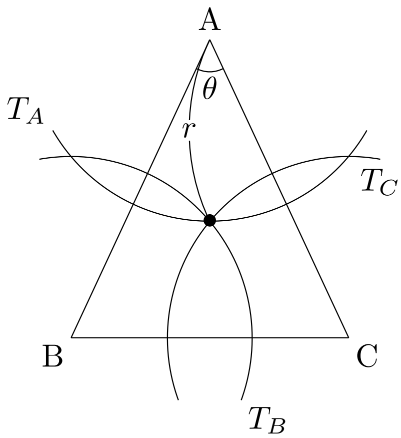


図 5

(ii)　$\dfrac{\pi}{3} < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\mathrm{BC} \geqq \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ である．このとき，S_B と S_C は BC の中点で接する状況であるから (図 6)

$$s = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = \sin\frac{\theta}{2}$$

である．また，T_A は △ABC の外心を通る，すなわち t は外接円の半径となるから (図 7)

$$t = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\sin\theta} = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

である．

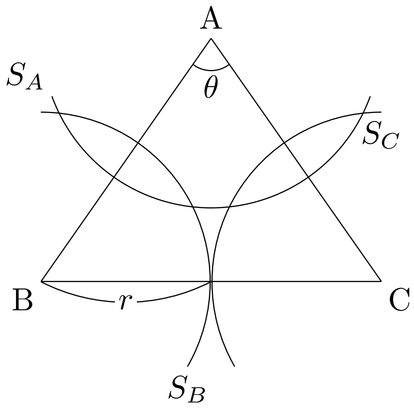


図 6

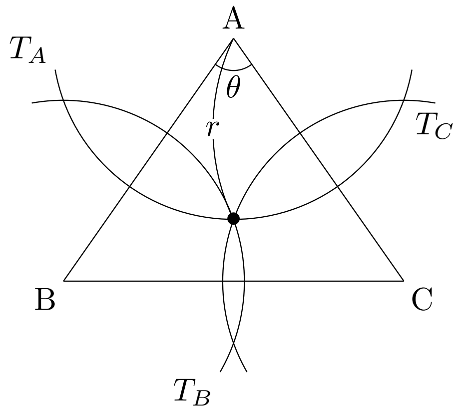


図 7

(iii)　$\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \pi$ のとき，(2) と同様に考えて，S_A と S_B の交点のうち，一方が BC 上にある状況である (図 8)．この点を D とおく．

$\angle\mathrm{BAD} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}$ であり，$\triangle\mathrm{DAB}$ は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{BD} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{AB}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

であり

$$s = t = \mathrm{BD} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

である．

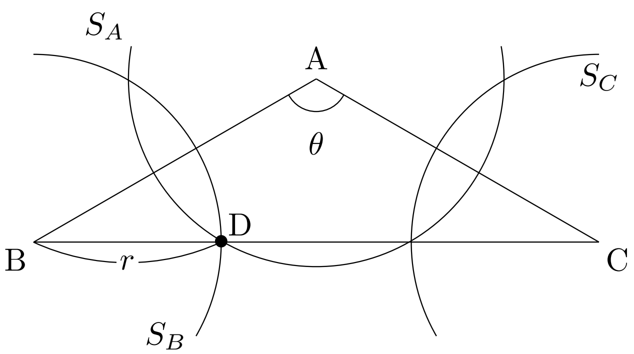


図 8

(i)〜(iii) より

$$\begin{cases} 0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{3} \text{のとき} & (s,\ t) = \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right) \\ \dfrac{\pi}{3} < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2} \text{のとき} & (s,\ t) = \left(\sin\dfrac{\theta}{2},\ \dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right) \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{のとき} & (s,\ t) = \left(\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}},\ \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right) \end{cases}$$

第 3 問

(1)　玉のおき方をすべて列挙する．ただし，下記はとりかえの操作を行う前の色を表している．

○○○○○　　○○○○●　　○○○●○　　○○●○○

○○●●○　　○○○●●　　○○●○●　　○○●●●

とりかえの操作が行われるものは，行うことにより，求める確率は $\dfrac{5}{8}$ である．

(2)　次のように確率を定義する．

右から 2 個が○○である確率 p_n

右から 2 個が○●である確率 q_n

右から 2 個が●○である確率 r_n

右から 2 個が●●である確率 s_n

これらを $n=0$ のときも定義する．すなわち，$p_0=1$，$q_0=r_0=s_0=0$ である．

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n \quad \cdots\cdots ①$$

$$s_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{2}s_n \quad \cdots\cdots ②$$

① − ② により

$$p_{n+1}-s_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n-s_n)$$

$$p_n-s_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(p_0-s_0)$$

$$p_n-s_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots ③$$

が得られる．次に，① + ② により

$$p_{n+1}+s_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n+s_n)+q_n+r_n$$

であり，$(p_n+s_n)+(q_n+r_n)=1$ により

$$p_{n+1}+s_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n+s_n)+1-(p_n+s_n)$$

$$p_{n+1}+s_{n+1}=-\frac{1}{2}(p_n+s_n)+1$$

$$p_{n+1}+s_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n+s_n-\frac{2}{3}\right)$$

$$p_n+s_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$p_n + s_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots ④$$

が得られる．③，④ から s_n を消去すると

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

である．一方，$q_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n$ も成り立つから，求める確率は

$$\begin{aligned} p_n + q_n =& p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} \\ =& \underline{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \end{aligned}$$

である．

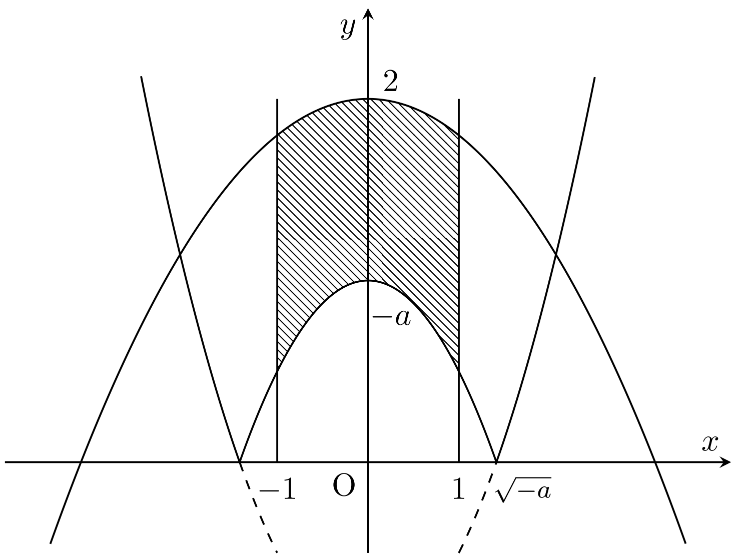
(3)　(2) により直ちに

$$p_n = \underline{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

である．

第 4 問

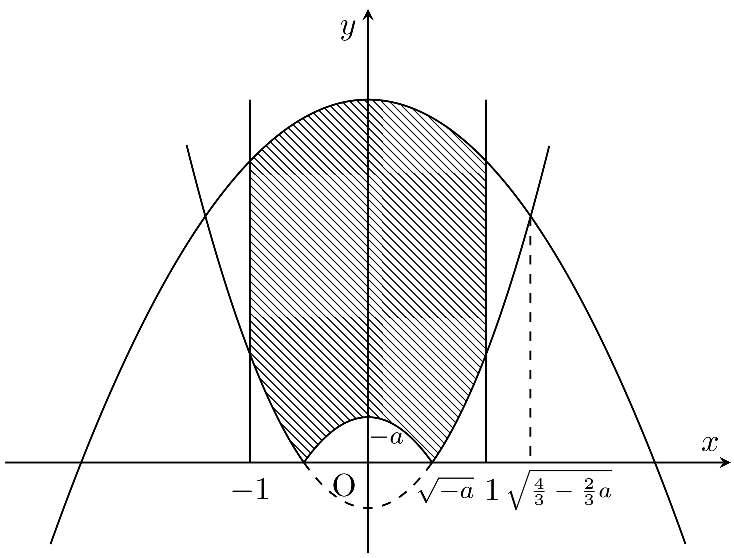
(i) $-2 \leqq a \leqq -1$ のとき



$S(a)$ は 2 つの放物線 $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$，$y = -x^2 - a$ と 2 直線 $x = \pm 1$ で囲まれる領域の面積である．

このとき，$S(a)$ は単調増加する．

(ii) $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき



$S(a)$ は 3 つの放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2$，$y=x^2+a$，$y=-x^2-a$ と 2 直線 $x=\pm 1$ で囲まれる領域の面積であるから

$$\begin{aligned}
S(a) &= 2\int_0^{\sqrt{-a}}\left\{-\frac{1}{2}x^2+2-\left(-x^2-a\right)\right\}dx+2\int_{\sqrt{-a}}^{1}\left\{-\frac{1}{2}x^2+2-\left(x^2+a\right)\right\}dx\\
&= 2\int_0^{\sqrt{-a}}\left(\frac{1}{2}x^2+2+a\right)dx+2\int_{\sqrt{-a}}^{1}\left(-\frac{3}{2}x^2+2-a\right)dx\\
&= 2\left[\frac{1}{6}x^3+2x+ax\right]_0^{\sqrt{-a}}+2\left[-\frac{1}{2}x^3+2x-ax\right]_{\sqrt{-a}}^{1}\\
&= 2\left(-\frac{1}{6}+2\right)-2\left(-\frac{(-a)\sqrt{-a}}{3}-a\sqrt{-a}\right)\\
&= 2\left\{\frac{1}{6}(-a)\sqrt{-a}+2\sqrt{-a}+a\sqrt{-a}\right\}\\
&\qquad +2\left\{-\frac{1}{2}+2-a+\frac{1}{2}(-a)\sqrt{-a}-2\sqrt{-a}+a\sqrt{-a}\right\}\\
&= \frac{8}{3}a\sqrt{-a}-2a+3
\end{aligned}$$

ここで，$\sqrt{-a}=k$ とおくと，$0 \leqq k \leqq 1$ であり

$$S(a)=-\frac{8}{3}k^3+2k^2+3$$

となる．$f(k)=-\dfrac{8}{3}k^3+2k^2+3$ として，$0<k<1$ において，$f(k)$ を k で微分すると

$$f'(k)=-8k^2+4k=-4k(2k-1)$$

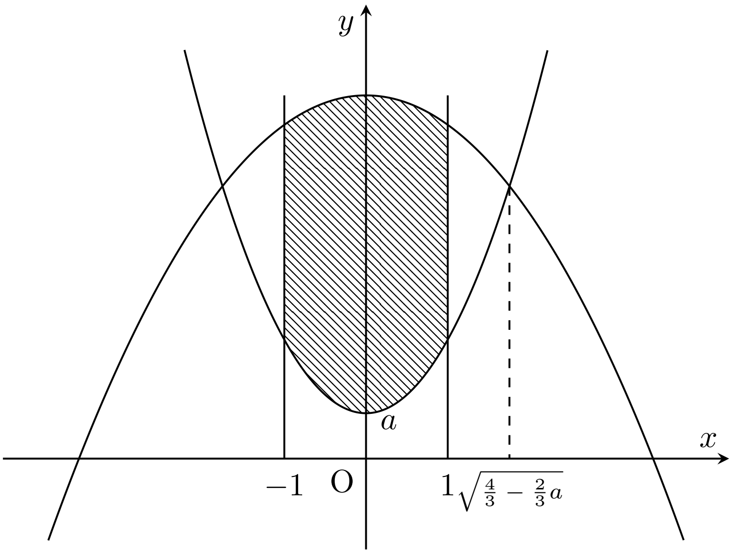
となり，$f'(k)=0$ のとき，$k=\dfrac{1}{2}\left(a=-\dfrac{1}{4}\right)$ である．

k	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$f(1)$

よって，増減表より最大値は

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3=\frac{19}{6}$$

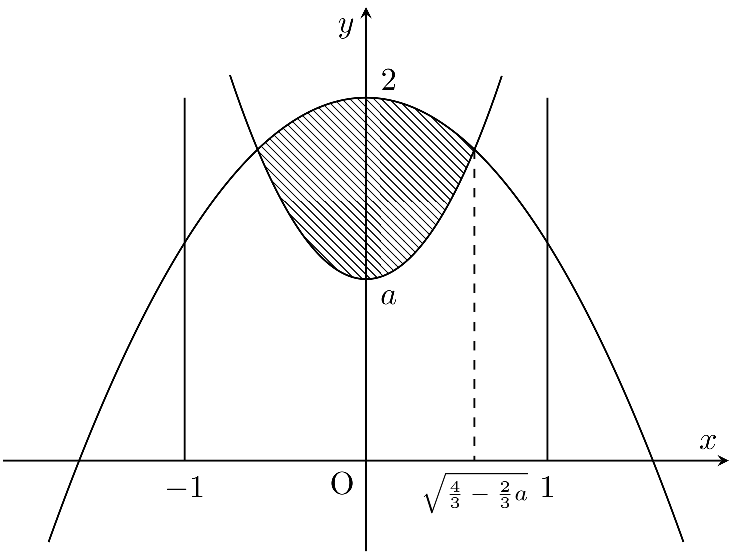
(iii) $0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき



$S(a)$ は 2 つの放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2$，$y=x^2+a$ と 2 直線 $x=\pm 1$ で囲まれる領域の面積である．

このとき，$S(a)$ は単調減少する．

(iv) $\dfrac{1}{2} \leqq a < 2$ のとき



$S(a)$ は 2 つの放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2$，$y=x^2+a$ で囲まれる領域の面積である．
このとき，$S(a)$ は単調減少する．

(i)〜(iv) より，$S(a)$ は $a=-\dfrac{1}{4}$ のとき，最大値 $\dfrac{19}{6}$ をとる．