

2025 東京大学 理科 数学 解答例

第1問

(1) $P_t(0, t), Q_t(t, 1), R_t(1, 1 - t)$ と A が原点であることより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS}_t &= (1-t)\overrightarrow{AP}_t + t\overrightarrow{AQ}_t, \\ \overrightarrow{AT}_t &= (1-t)\overrightarrow{AQ}_t + t\overrightarrow{AR}_t, \\ \overrightarrow{AU}_t &= (1-t)\overrightarrow{AS}_t + t\overrightarrow{AT}_t \\ &= (1-t)^2\overrightarrow{AP}_t + (2t-2t^2)\overrightarrow{AQ}_t + t^2\overrightarrow{AR}_t \\ &= (3t^2 - 2t^3, -3t^2 + 3t)\end{aligned}$$

であるから

$$\underline{\underline{U_t(3t^2 - 2t^3, -3t^2 + 3t)}}$$

となる.

(2) $U_t(x(t), y(t))$ とすると

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 6t - 6t^2 = 6t(1-t)$$

であるが, $0 \leq t \leq 1$ より $x'(t) \geq 0$ となり, $x(t)$ は単調増加. また, $y(t) \geq 0$ より面積は

$$\begin{aligned}\int_0^1 y dx &= \int_0^1 y(t) \frac{dx(t)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 (3t - 3t^2)(6t - 6t^2) dt \\ &= \int_0^1 (18t^4 - 36t^3 + 18t^2) dt \\ &= \left[\frac{18}{5}t^5 - 9t^4 + 6t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

である.

(3) 媒介変数 t で表される曲線 $x = x(t), y = y(t)$ ($0 \leq t \leq a$) の長さより

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ = \int_0^a \sqrt{(6t - 6t^2)^2 + (3 - 6t)^2} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^a \sqrt{36t^4 - 72t^3 + 72t^2 - 36t + 9} dt \\ &= 3 \int_0^a \sqrt{4t^4 - 8t^3 + 8t^2 - 4t + 1} dt \\ &= 3 \int_0^a \sqrt{(2t^2 - 2t + 1)^2} dt \\ &= 3 \int_0^a (2t^2 - 2t + 1) dt \quad (2t^2 - 2t + 1 > 0 \text{ に注意}) \\ &= 3 \left[\frac{2}{3}t^3 - t^2 + t \right]_0^a \\ &= \underline{\underline{2a^3 - 3a^2 + 3a}} \end{aligned}$$

となる。

第2問

(1) $f(x) = x - 1 - \log x$ とおくと

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

であるから、 $f(x)$ の $x > 0$ における増減表は次のようになる。

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘		↗

よって、 $f(x) \geq f(1) = 0$ であるから、 $x > 0$ のとき、不等式 $\log x \leq x - 1$ が成り立つ。

(2) 関数 $y = \log x$ のグラフは上に凸であるから

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(\log 1 + \log x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{2n} \log x$$

が成り立ち、両辺に n をかけて、区間 $1 \leq x \leq 2$ で積分すると

$$\begin{aligned} n \int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx &\geq \frac{1}{2} \int_1^2 \log x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x(\log x - 1) \right]_1^2 \\ &= \log 2 - \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また、(1) で証明した不等式の x を $\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}$ に置き換えると

$$\log \frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2} \leq \frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2} - 1$$

が成り立ち、両辺に n をかけて、区間 $1 \leq x \leq 2$ で積分すると

$$\begin{aligned} n \int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx &\leq n \int_1^2 \left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2} - 1\right) dx \quad \dots \textcircled{2} \\ &= \frac{n}{2} \left[\frac{n}{n+1} x^{1+\frac{1}{n}} - x \right]_1^2 \\ &= \frac{n}{2} \left\{ \left(\frac{n}{n+1} 2^{1+\frac{1}{n}} - 2\right) - \left(\frac{n}{n+1} - 1\right) \right\} \\ &= n \left(\frac{n}{n+1} 2^{\frac{1}{n}} - 1\right) + \frac{n}{2(n+1)} \\ &= n(2^{\frac{1}{n}} - 1) - \frac{n}{n+1} \cdot 2^{\frac{1}{n}} + \frac{n}{2(n+1)} \end{aligned}$$

ここで、微分係数の定義より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \log 2$$

であり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot 2^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^2 \left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2} - 1 \right) dx = \log 2 - \frac{1}{2}$$

①, ②より, はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^2 \log \left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2} \right) dx = \underbrace{\log 2 - \frac{1}{2}}$$

である.

(2) の別解 部分積分を用いると

$$\begin{aligned} n \int_1^2 \log \left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2} \right) dx &= n \left[x \log \left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2} \right) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}} dx \\ &= 2n \log \frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2} - \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+x^{\frac{1}{n}}} \right) dx \\ &= 2n \log \frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2} - 1 + \int_1^2 \frac{1}{1+x^{\frac{1}{n}}} dx \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が得られる. まず, ③の第1項について考える.

$$\begin{aligned} 2n \log \frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2} &= 2n \log \left(1 + \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2} \right) \\ &= \frac{\log \left(1 + \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2} \right)}{\frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2}} \cdot n(2^{\frac{1}{n}} - 1) \end{aligned}$$

ここで, $x = \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2}$ とおくと, $n \rightarrow \infty$ のとき, $x \rightarrow +0$ であり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2} \right)}{\frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

また,

$$n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{e^{\frac{1}{n} \log 2} - 1}{\frac{1}{n} \log 2} \cdot \log 2$$

として, $y = \frac{1}{n} \log 2$ とおくと, $n \rightarrow \infty$ のとき, $y \rightarrow +0$ であるから, 微分係数の定義より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \log 2 \lim_{y \rightarrow +0} \frac{e^y - 1}{y} = \log 2$$

次に, ③の定積分の項について考える. 区間 $1 \leq x \leq 2$ で

$$\frac{1}{1+2^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{1+x^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

であるから, 同区間で積分することにより

$$\frac{1}{1+2^{\frac{1}{n}}} \leq \int_1^2 \frac{1}{1+x^{\frac{1}{n}}} dx \leq \frac{1}{2}$$

が得られ, この不等式の最左辺について, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$ であるから, はさみうちの原理より

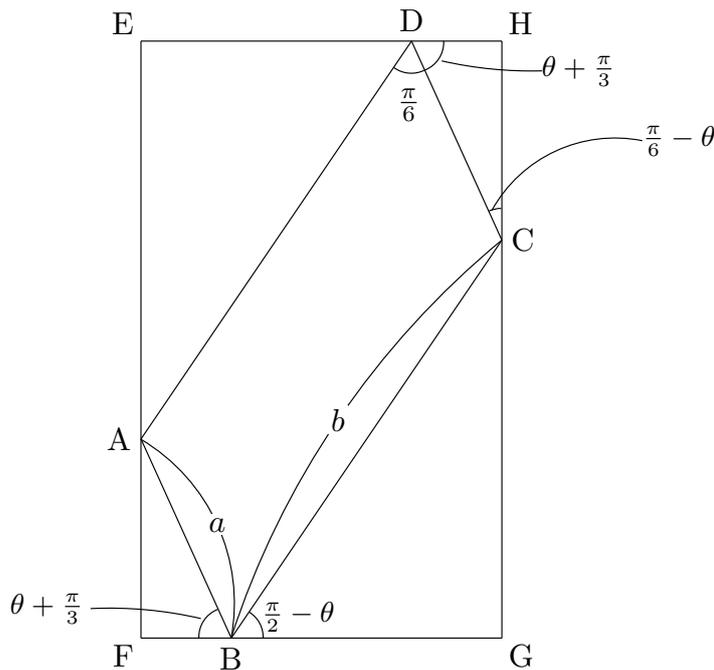
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{1}{1+x^{\frac{1}{n}}} dx = \frac{1}{2}$$

である。よって、③より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^2 \log \left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2} \right) dx = \underbrace{\log 2 - \frac{1}{2}}$$

である。

第3問



(1) $\angle BCG = \theta$ のとき，他の角度は上図のようになるから

$$\begin{aligned} FG &= FB + BG \\ &= a \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + b \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} GH &= CH + GC \\ &= a \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + b \cos \theta \end{aligned}$$

よって，長方形 EFGH の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= FG \times GH \\ &= \left\{ a \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + b \sin \theta \right\} \left\{ a \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + b \cos \theta \right\} \\ &= a^2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + b^2 \sin \theta \cos \theta \\ &\quad + ab \left\{ \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \cos \theta + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \theta \right\} \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sin \left(2\theta + \frac{2}{3} \pi \right) + \frac{1}{2} b^2 \sin 2\theta + \frac{1}{2} ab \end{aligned}$$

である.

(2) (1) より, θ のとり得る値の範囲は

$$\theta \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\pi}{6} - \theta \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\pi}{2} - \theta \geq 0$$

すなわち, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ であるから, $0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{3}$ である. ここで, $2\theta = \phi$ とおくと, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$ である. このもとで,

$$2S = \frac{1}{2} \{ \sqrt{3}a^2 \cos \phi + (2b^2 - a^2) \sin \phi \} + ab$$

ここで, $p = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$, $q = \frac{2b^2 - a^2}{2}$ とおき, 点 $R(p, q)$, 点 $P(\cos \phi, \sin \phi)$ とすると

$$2S = p \cos \phi + q \sin \phi + ab = \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OP} + ab$$

ここで, $0 < a \leq b$ より, $p > 0$, $q > 0$ に注意すると, S の最大値は

(i) $q \leq \sqrt{3}p$, すなわち $a \leq b \leq \sqrt{2}a$ のとき

\overrightarrow{OR} と \overrightarrow{OP} が同じ向きで, \overrightarrow{OR} と \overrightarrow{OP} が平行であるから

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{1}{2} |\overrightarrow{OR}| |\overrightarrow{OP}| + \frac{1}{2} ab \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + q^2} + \frac{1}{2} ab \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} + \frac{1}{2} ab \end{aligned}$$

(ii) $q > 3p$, すなわち $b > \sqrt{2}a$ のとき

$\phi = \frac{\pi}{3}$ のとき, $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OP}$ の値は最大となるので

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 + \frac{1}{2} ab$$

以上 (i), (ii) より S の最大値は

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} + \frac{1}{2} ab & (a \leq b \leq \sqrt{2}a) \\ \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 + \frac{1}{2} ab & (b > \sqrt{2}a) \end{cases}$$

である.

第4問

(1) n, a は自然数であるから

$$n(n+1) - a < (n+1)^2 - a < (n+1)^2$$

である。よって、 $f_a(n) = n(n+1) - a$ が平方数ならば

$$\begin{aligned} n(n+1) - a &\leq n^2 \\ n &\leq a \end{aligned}$$

が成り立つ。

(2) $f_a(n)$ が平方数となるとき、0以上の整数 m を用いて

$$n^2 + n - a = m^2$$

と表せる。これより

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - a - \frac{1}{4} &= m^2 \\ (2n+1)^2 - 4m^2 &= 4a+1 \\ (2n+1-2m)(2n+1+2m) &= 4a+1 \end{aligned}$$

である。 $n = m = a$ はこれを満たすので、 $N_a \geq 1$ である。

[(i) \Rightarrow (ii) の証明]

対偶を示す。 $4a+1$ が合成数ならば

$$(2n-2m+1, 2n+2m+1) = (p, q)$$

となる3以上の奇数 p, q が存在する。

ここで、 $4a+1$ を4で割った余りは1であるから、 b, c を自然数として

$$(p, q) = (4b \pm 1, 4c \pm 1) \quad (\text{複号同順})$$

とおける。ゆえに

$$(n, m) = (b+c, c-b), (b+c-1, c-b)$$

であるから、いずれの場合も n, m ともに自然数となる。したがって、 $N_a \geq 2$ である。

[(ii) \Rightarrow (i) の証明]

$4a + 1$ が素数であることから, 組 $(2n + 1 - 2m, 2n + 1 + 2m)$ は

$$(2n + 1 - 2m, 2n + 1 + 2m) = (1, 4a + 1)$$

のみである. よって

$$(n, m) = (a, a)$$

であるから, $N_a = 1$ である.

以上より, (i) と (ii) が同値であることが示された.

第5問

(1) A_1, A_2 ともに 3 以上と仮定する。このとき最初に (T_1) を行った後の一番左の札の数字は 3 以上である。その後最後の (T_1) を行う直前まで一番左の札の数字は固定され、一番最後の (T_1) を行った後は一番左の札または左から 2 番目の札の数字が 3 以上となり、札が左から順に $1, 2, \dots$ となることはない。よって背理法により、 A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下でなければならない。

(2) $\{A_1, A_2\} = \{1, 2\}$ である場合について考える。このとき最初に (T_1) を行った後の札の数字の並び方は $1, 2, \dots$ となり、最初の (T_2) 、後の (T_2) 、一番最後の (T_1) は並び方に影響しない。最初に (T_1) を行った後の札の数字の並び方の左から 3 番目以降において $3, 4, \dots$ が書かれた札をそれぞれ $1, 2, \dots$ が書かれた札に読み替え、最初と最後の 2 回ずつを除いた操作において $(T_3), (T_4), \dots$ を $(T_1), (T_2), \dots$ と読み替えて考えて、この場合の適する並び方の数は左端の 2 枚の並び方 1 通りごとに c_{n-2} 通りずつである。

a を 3 以上の整数として、 $\{A_1, A_2\} = \{1, a\}$ である場合について考える。このとき最初に (T_1) を行った後の札の数字の並び方は $1, a, \dots$ となり、一番最後の (T_1) は並び方に影響しない。最初に (T_1) を行った後の札の数字の並び方の左から 2 番目以降において $2, 3, \dots$ が書かれた札をそれぞれ $1, 2, \dots$ が書かれた札に読み替え、最初と最後の 1 回ずつを除いた操作において $(T_2), (T_3), \dots$ を $(T_1), (T_2), \dots$ と読み替えて考えて、この場合の適する並び方の数は $n - 1$ 枚における適する並び方の数から左端が 1 である並び方の数を引いたものであることがわかる。 $n - 1$ 枚における適する並び方の中で左端が 1 である並び方は、左から 2 番目以降において $2, 3, \dots$ が書かれた札をそれぞれ $1, 2, \dots$ が書かれた札に読み替え、最初と最後の 1 回ずつを除いた操作において $(T_2), (T_3), \dots$ を $(T_1), (T_2), \dots$ と読み替えて考えて、 $n - 2$ 枚における適する並び方の数と等しいとわかる。よってこの場合の適する並び方の数は左端の 2 枚の並び方 1 通りごとに $c_{n-1} - c_{n-2}$ 通りずつである。

a を 3 以上の整数として、 $\{A_1, A_2\} = \{2, a\}$ である場合について考える。このとき最初に (T_1) を行った後の札の数字の並び方は $2, a, \dots$ となり、一番最後の (T_1) の直前の並び方は $2, 1, \dots$ となって最後 $1, 2, \dots$ となる。最初と最後の 1 回ずつを除いた操作において最初に (T_1) を行った後の札の数字の並び方の左から 2 番目以降において 1 が書かれた札を 2 が書かれた札に読み替えれば、 a を 3 以上の整数として、 $\{A_1, A_2\} = \{1, a\}$ である場合について考えたことより、この場合の適する並び方の数は左端の 2 枚の並び方 1 通りごとに $c_{n-1} - c_{n-2}$ 通りずつである。

(1) でみたことよりこれで全ての場合をもれも重複もなく尽くしている。よって

$$c_n = 2c_{n-2} + 4(c_{n-1} - c_{n-2}) = \underbrace{4c_{n-1} - 2c_{n-2}}$$

である。

第6問

(1) 点 z は点 $\frac{1}{2}$ を中心とする半径が $\frac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた部分を動くので、 $-\pi < \theta < \pi$ とし

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

とおくことができる。このとき、 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ が成り立つので、これを極形式に直すと

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 + \cos \theta}{2} + \frac{1}{2}i \sin \theta \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。これより、ド・モアブルの定理を利用して

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \left\{ \cos \left(-\frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\theta}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 1 - i \tan \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

ゆえに、 $\frac{1}{z}$ の実部は 1 である。

(2) $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $-\tan \frac{\theta}{2}$ は実数全体を動く。

これより、点 α, β が C 上の点のとき、相異なる実数 s, t を用いて

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + si, \quad \frac{1}{\beta} = 1 + ti$$

と表すことができる。これを用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} &= (1 + si)^2 + (1 + ti)^2 \\ &= 2 - s^2 - t^2 + 2i(s + t) \end{aligned}$$

となるので、 $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = X + iY$ (ただし X, Y は実数) とおくと

$$X = 2 - s^2 - t^2, \quad Y = 2(s + t)$$

が成り立つ。

このとき、 $Y = 2(s + t)$ より $t = \frac{1}{2}Y - s$ が成り立つので、これを $X = 2 - s^2 - t^2$ に代

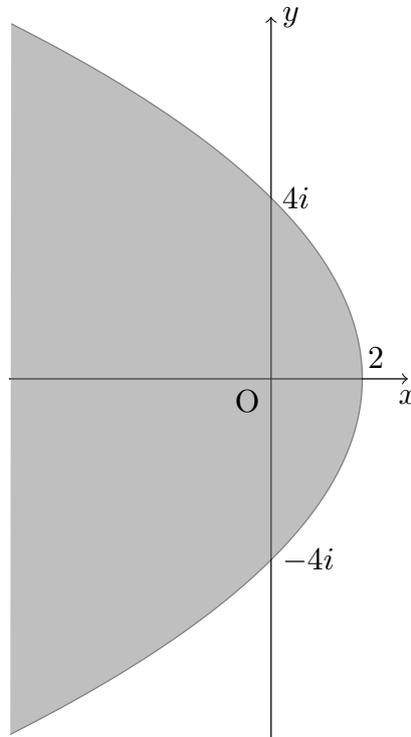
入して

$$\begin{aligned} X &= 2 - s^2 - \left(\frac{1}{2}Y - s\right)^2 \\ &= -2s^2 + Ys + 2 - \frac{1}{4}Y^2 \\ &= -2\left(s - \frac{1}{4}Y\right)^2 + 2 - \frac{1}{8}Y^2 \end{aligned}$$

$t = \frac{1}{2}Y - s$, $s \neq t$ より $s \neq \frac{1}{4}Y$ が成り立つので, X のとりうる値の範囲を Y で表すと

$$X < 2 - \frac{1}{8}Y^2$$

よって, 点 $X + Yi$ のとりうる範囲は次の図の灰色の部分である。ただし, 境界線上の点はすべて含まない。



(3) (2) の領域の境界線の方程式は $x = 2 - \frac{1}{8}y^2$ であり, これを整理すると

$$y^2 = -8(x - 2)$$

である。

ここで, 座標平面上の方程式 $y^2 = -8x$ で表される曲線は, 焦点の座標が $(-2, 0)$, 準線の方程式が $x = 2$ の放物線である。よって, 座標平面上の方程式 $y^2 = -8(x - 2)$ で表される曲線は焦点が原点, 準線の方程式が $x = 4$ の放物線で, 特に焦点が原点で右に凸な放物線であることに注意すると, (2) の領域の境界線は, 正の定数 l を用いた極方程式

$$r = \frac{l}{1 + \cos \theta}$$

で表すことができる。

このとき、この放物線は直交座標が $(2, 0)$ 、すなわち極座標が $(2, 0)$ の点を通るので、 $l = 4$ であり、極方程式は

$$r = \frac{4}{1 + \cos \theta}$$

である。ゆえに

$$r \geq \frac{4}{1 + \cos \theta}$$

となる実数 r を用い、点 γ を極形式で表すと

$$\gamma = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

となり、これを用いると、(1) と同様にして

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta)$$

であるので、 $\frac{1}{\gamma}$ の実部は $0 < \frac{1}{r} \leq \frac{1 + \cos \theta}{4}$ を満たす実数 r を用いて

$$\frac{1}{r} \cos \theta$$

と表される。ここで

$$\frac{1 + \cos \theta}{4} \times \cos \theta = \frac{1}{4} \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{16}$$

であるので、 $\frac{1}{\gamma}$ の実部のとりうる値の範囲は

$$-\frac{1}{16} \leq \frac{1}{r} \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

となり

$$\text{最大値 } \frac{1}{2}, \text{ 最小値 } -\frac{1}{16}$$

である。