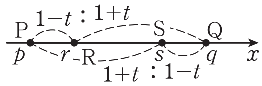
$\boxed{1}$ 解 答　（１）　$\mathrm{P}(p,0)$，$\mathrm{Q}(q,0)$，$\mathrm{R}(r,0)$，$\mathrm{S}(s,0)$ とおく．

$$r=\frac{(1+t)p+(1-t)q}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

図1




より，R は PQ を $(1-t):(1+t)$ に内分する点であり，

$$s=\frac{(1-t)p+(1+t)q}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

より，S は PQ を $(1+t):(1-t)$ に内分する点である．$0 \leqq 1-t < 1+t$ であるから，$x$ 軸上で $x$ 座標の小さい順に P，R，S，Q と並んでおり

$$q-s=\mathrm{QS}=\frac{1-t}{2}\mathrm{PQ},\ r-p=\mathrm{RP}=\frac{1-t}{2}\mathrm{PQ}$$

$p$，$q$ は $f(x)=0$ の 2 解である．$f(x)=0$ とすると，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$ であるから

$$\mathrm{PQ}=q-p=\sqrt{b^2-4c}$$

よって

$$q-s=r-p=\boldsymbol{\frac{1-t}{2}\sqrt{b^2-4c}}$$

一方，①＋②，①－② として

$$s+r=p+q=\boldsymbol{-b},\ s-r=t(q-p)=\boldsymbol{t\sqrt{b^2-4c}}$$

（２）　$(s+r)^2-(s-r)^2=4sr$ であるから

$$sr=\frac{1}{4}\{(s+r)^2-(s-r)^2\}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\{b^2-t^2(b^2-4c)\}}$$

$(s+r)^2+(s-r)^2=2(s^2+r^2)$ であるから

$$s^2+r^2=\frac{1}{2}\{(s+r)^2+(s-r)^2\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\{b^2+t^2(b^2-4c)\}}$$

（３）　$r \leqq x \leqq s$ において $f(x) \leqq 0$ であるから，求める面積を $T$ とすると

$$\begin{aligned}
T&=\int_r^s\{-f(x)\}\,dx=\int_r^s\{-(x^2+bx+c)\}\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{b}{2}x^2-cx\right]_r^s\\
&=-\frac{1}{3}(s^3-r^3)-\frac{b}{2}(s^2-r^2)-c(s-r)\\
&=\frac{1}{6}(s-r)\{-2(s^2+sr+r^2)-3b(s+r)-6c\}\\
&=\frac{1}{6}t\sqrt{b^2-4c}\left(-2\left\{\frac{3}{4}b^2+\frac{1}{4}t^2(b^2-4c)\right\}-3b(-b)-6c\right)\\
&=\frac{1}{6}t\sqrt{b^2-4c}\left\{\frac{3}{2}(b^2-4c)-\frac{1}{2}t^2(b^2-4c)\right\}\\
&=\frac{1}{6}t\sqrt{b^2-4c}\cdot\frac{1}{2}(3-t^2)(b^2-4c)=\boldsymbol{\frac{1}{12}t(3-t^2)\left(\sqrt{b^2-4c}\right)^3}
\end{aligned}$$

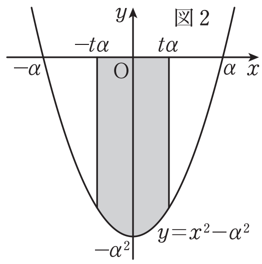


図 2

**注 意**　$x$ 軸方向に平行移動をしても，P，Q，R，S の位置関係は変わらず，面積も変わらないことに注意する．置き換えと平行移動を利用して計算量を減らす．

$f(x)=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2-4c}{4}$ であるから，$\alpha=\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}$ とおいて，$y=f(x)$ のグラフを $x$ 軸方向に $\dfrac{b}{2}$ だけ平行移動すると，$y=x^2-\alpha^2$ となる．このとき，$p=-\alpha$，$q=\alpha$ となるから，①，② より $r=-t\alpha$，$s=t\alpha$ であり，$y$ 軸に関する対称性を用いて

$$\frac{T}{2}=\int_0^{t\alpha}\{-(x^2-\alpha^2)\}\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\alpha^2x\right]_0^{t\alpha}$$

$$=-\frac{1}{3}t^3\alpha^3+t\alpha^3=\frac{1}{3}t\alpha^3(3-t^2)=\frac{1}{24}t(3-t^2)\left(\sqrt{b^2-4c}\right)^3$$

よって，$T=\dfrac{1}{12}t(3-t^2)\left(\sqrt{b^2-4c}\right)^3$ である．

$\boxed{2}$ 解答　（１）　$a^2-b^2=c$ より，$(a+b)(a-b)=c$ である．また，$a \geqq b \geqq 0$ より $a+b \geqq a-b \geqq 0$ であり

$$(a+b)-(a-b)=2b=(\text{偶数})$$

より，$a+b$ と $a-b$ の偶奇が一致することに注意する．

$c=24$ のとき，$(a+b)(a-b)=2^3\cdot 3$ であるから

$$(a+b,\ a-b)=(12,\ 2),\ (6,\ 4) \qquad \therefore\quad \boldsymbol{(a,\ b)=(7,\ 5),\ (5,\ 1)}$$

$c=25$ のとき，$(a+b)(a-b)=5^2$ であるから

$$(a+b,\ a-b)=(25,\ 1),\ (5,\ 5) \qquad \therefore\quad \boldsymbol{(a,\ b)=(13,\ 12),\ (5,\ 0)}$$

$c=26$ のとき，$(a+b)(a-b)=2\cdot 13$ であるが，$a+b$ と $a-b$ の偶奇が一致することから，$(a+b,\ a-b)$ は存在しない．よって，**$(a,\ b)$ はない**．

（２）　$(a+b)(a-b)=2^2p^{2n}$ である．$a+b$ と $a-b$ の偶奇が一致し，また，$p$ が 3 以上の素数であることから

$$a+b=2p^k \quad \cdots\cdots①$$

$$a-b=2p^l \quad \cdots\cdots②$$

$(k+l=2n,\ k \geqq l \geqq 0,\ k,\ l$ は整数$)$ と書ける．$(①+②)\div 2$，$(①-②)\div 2$ として

$$a=p^k+p^l,\ \ b=p^k-p^l$$

$k+l=2n$ と $k \geqq l \geqq 0$ より $k=2n-l \geqq l$ であり，$l=0,\ 1,\ \cdots,\ n$ である．よって

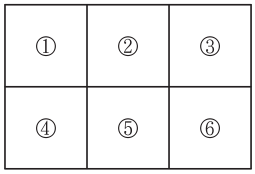
$$\boldsymbol{(a,\ b)=(p^{2n-l}+p^l,\ p^{2n-l}-p^l)\quad (l=0,\ 1,\ \cdots,\ n)}$$

**3** 解答 （1） 1回後の状態に着目する．対称性より，① と ② を選んだときのみを調べる．コインが裏になっているマス目を網目で表す．

① を選ぶと図 1 になり，この後 1 回の操作ですべてのコインが裏向きになることはない．

② を選ぶと図 2 になり，この後 1 回の操作ですべてのコインが裏向きになるのは，⑤ を選ぶときである．

よって，2 回ですべてのコインが裏向きになるのは，②，⑤ の順に選ぶか，⑤，② の順に選ぶ場合の 2 通りあるから



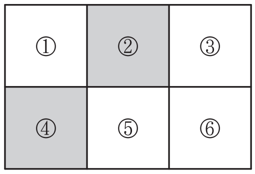


図 1

$$p_2 = \frac{2}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

（2） $n$ 回後にすべてのコインが裏向きであるのは，どのコインも奇数回裏返される場合である．なお，「裏返される」と「選ばれる」は意味が違うことに注意する．

各コインが裏返されるのは，どのコインが選ばれる場合かを調べると，次の表になる．

| 裏返される | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 選ばれる | ②, ④ | ①, ③, ⑤ | ②, ⑥ | ①, ⑤ | ②, ④, ⑥ | ③, ⑤ |

①，②，③，④，⑤，⑥ が選ばれる回数をそれぞれ $a$，$b$，$c$，$d$，$e$，$f$ とすると，各コインが裏返される回数がすべて奇数であることから

$b+d=$（奇数） ……Ⓐ

$a+c+e=$（奇数） ……Ⓑ

$b+f=$（奇数） ……Ⓒ

$a+e=$（奇数） ……Ⓓ

$b+d+f=$（奇数） ……Ⓔ

$c+e=$（奇数） ……Ⓕ

Ⓐ，Ⓔ より $f$ は偶数で，Ⓒ，Ⓔ より $d$ は偶数である．Ⓑ，Ⓓ より $c$ は偶数で，Ⓑ，Ⓕ より $a$ は偶数である．よって，Ⓐ より $b$ は奇数で，Ⓓ より $e$ は奇数である．

$$\boldsymbol{A = \{②, ⑤\},\ B = \{①, ③, ④, ⑥\}}$$

（3） 操作を 4 回行うとき，② と ⑤ はともに奇数回選ばれるから，少なくとも 1 回ずつ選ばれる．①，③，④，⑥ がいずれも偶数回選ばれることに注意して，残り 2 回に $A$，$B$ どちらのコインが選ばれるかで場合分けする．

（ア） ② と ⑤ のうち一方が 3 回，もう一方が 1 回選ばれるとき

② と ⑤ のうち，3 回選ばれるコインは 2 通りある．そのコインを Ⓧ，もう一方のコインを Ⓨ とすると，4 回の操作で選ばれるコインの順序は，Ⓧ，Ⓧ，Ⓧ，Ⓨ の順列を考えて，${}_4\mathrm{C}_3=4$ 通りある．よって，$2\cdot 4=8$ 通りある．

（イ） ② と ⑤ が 1 回ずつ選ばれ，①，③，④，⑥ のうち 1 つだけが 2 回選ばれるとき

①，③，④，⑥ のうち，選ばれるコインは 4 通りある．そのコインを Ⓧ とすると，4 回の操作で選ばれるコインの順序は，②，⑤，Ⓧ，Ⓧ の順列を考えて，$\dfrac{4!}{2!}=12$ 通りある．よって，$4\cdot 12=48$ 通りある．

以上より

$$p_4=\frac{8+48}{6^4}=\frac{56}{6^4}=\boldsymbol{\frac{7}{162}}$$