$\boxed{1}$ 解答　（1）　$g(x) = cx - f(x)$ より

$$g'(x) = c - f'(x),\quad g''(x) = -f''(x) < 0$$

$g'(x)$ は減少関数であり，$a < c < b$ より

$$\lim_{x\to-\infty} g'(x) = c - a > 0,\quad \lim_{x\to\infty} g'(x) = c - b < 0$$

であるから，$g'(x) = 0$ はただ 1 つの実数解 x_0 をもつ．このとき，$g(x)$ は表のように増減するから，$g(x)$ を最大にする x は $x = x_0$ のみであり，題意は示された．

x	$\cdots$	x_0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

（2）　$f(x) = \log\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \log(e^x + e^{-x}) - \log 2$ であるから

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

また

$$a = \lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \mathbf{-1},\quad b = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \mathbf{1}$$

（3）　$-1 < c < 1$ である．$g'(x_0) = 0$ であるから $c = f'(x_0)$ であり

$$c = \frac{e^{x_0} - e^{-x_0}}{e^{x_0} + e^{-x_0}}$$

$t = e^{x_0}$ とおくと，$t > 0$ であり

$$c = \frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1}}$$

$$(t^2 + 1)c = t^2 - 1$$

$$(1 - c)t^2 = 1 + c \qquad \therefore\quad t = \sqrt{\frac{1 + c}{1 - c}}$$

よって，$e^{x_0} = \sqrt{\dfrac{1 + c}{1 - c}}$ であり

$$x_0 = \log\sqrt{\frac{1 + c}{1 - c}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1 + c}{1 - c}}$$

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= cx_0 - f(x_0) = cx_0 - \log\frac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2} \\
&= cx_0 - \log\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1 + c}{1 - c}} + \sqrt{\frac{1 - c}{1 + c}}\right)\right\} \\
&= cx_0 - \log\frac{1 + c + 1 - c}{2\sqrt{1 - c^2}} = cx_0 - \log\frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} \\
&= \frac{1}{2}\left\{c\log\frac{1 + c}{1 - c} + \log(1 - c^2)\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\{(1 + c)\log(1 + c) + (1 - c)\log(1 - c)\}}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 解答 （1） $a^2-b^2=c$ より，$(a+b)(a-b)=c$ である．また，$a\geqq b\geqq 0$ より $a+b\geqq a-b\geqq 0$ であり

$$(a+b)-(a-b)=2b=(\text{偶数})$$

より，$a+b$ と $a-b$ の偶奇が一致することに注意する．

$c=24$ のとき，$(a+b)(a-b)=2^3\cdot 3$ であるから

$$(a+b,\ a-b)=(12,\ 2),\ (6,\ 4) \qquad \therefore\quad \boldsymbol{(a,\ b)=(7,\ 5),\ (5,\ 1)}$$

$c=25$ のとき，$(a+b)(a-b)=5^2$ であるから

$$(a+b,\ a-b)=(25,\ 1),\ (5,\ 5) \qquad \therefore\quad \boldsymbol{(a,\ b)=(13,\ 12),\ (5,\ 0)}$$

$c=26$ のとき，$(a+b)(a-b)=2\cdot 13$ であるが，$a+b$ と $a-b$ の偶奇が一致することから，$(a+b,\ a-b)$ は存在しない．よって，**$(a,\ b)$ はない**．

（2） $(a+b)(a-b)=2^2p^{2n}$ である．$a+b$ と $a-b$ の偶奇が一致し，また，p が 3 以上の素数であることから

$$a+b=2p^k \quad\cdots\cdots①$$

$$a-b=2p^l \quad\cdots\cdots②$$

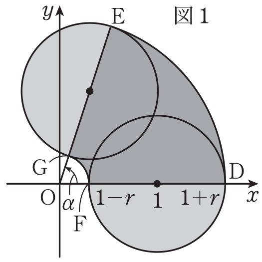
$(k+l=2n,\ k\geqq l\geqq 0,\ k,\ l$ は整数$)$ と書ける．$(①+②)\div 2$，$(①-②)\div 2$ として

$$a=p^k+p^l,\ \ b=p^k-p^l$$

$k+l=2n$ と $k\geqq l\geqq 0$ より $k=2n-l\geqq l$ であり，$l=0,\ 1,\ \cdots,\ n$ である．よって

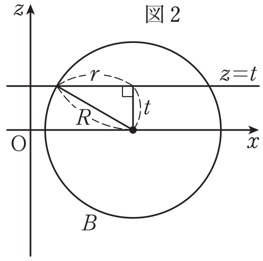
$$\boldsymbol{(a,\ b)=(p^{2n-l}+p^l,\ p^{2n-l}-p^l)\quad (l=0,\ 1,\ \cdots,\ n)}$$

$\boxed{3}$ 解答 （**1**） C の通過領域は図 1 の網目部分である．図のように点をとると，濃い網目部分の面積は扇形 ODE と扇形 OFG の面積の差であり，2 つの薄い網目部分の面積の和は C の面積であるから，求める面積を $S(r)$ とすると



$$S(r)=\frac{1}{2}(1+r)^2\alpha-\frac{1}{2}(1-r)^2\alpha+\pi r^2=\boldsymbol{2\alpha r+\pi r^2}$$

（**2**） xy 平面に関する対称性より，$z\geqq 0$ の部分の体積を求めて 2 倍する．B の平面 $z=t\ (0\leqq t<R)$ による切り口の円の半径を r とすると，図 2 より $r=\sqrt{R^2-t^2}$ である．B が角度 α だけ回転するとき，この切り口の円が通過する領域の面積を $U(t)$ とすると，（1）の $S(r)$ を用いて



$$U(t)=S\left(\sqrt{R^2-t^2}\right)=2\alpha\sqrt{R^2-t^2}+\pi(R^2-t^2)$$

求める体積を V とすると

$$\frac{V}{2}=\int_0^R U(t)\,dt=\int_0^R\left\{2\alpha\sqrt{R^2-t^2}+\pi(R^2-t^2)\right\}dt$$

$$=2\alpha\cdot\frac{1}{4}\pi R^2+\pi\left[R^2t-\frac{t^3}{3}\right]_0^R=\frac{\pi}{2}R^2\alpha+\frac{2}{3}\pi R^3$$

$$V=\boldsymbol{\pi R^2\alpha+\frac{4}{3}\pi R^3}$$

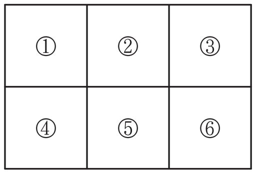
ただし，$\displaystyle\int_0^R\sqrt{R^2-t^2}\,dt$ が半径 R の四分円の面積 $\dfrac{1}{4}\pi R^2$ であることを用いた．

$\boxed{4}$ $\boxed{\text{解答}}$ （1） 1回後の状態に着目する．対称性より，① と ② を選んだときのみを調べる．コインが裏になっているマス目を網目で表す．

① を選ぶと図1になり，この後1回の操作ですべてのコインが裏向きになることはない．

② を選ぶと図2になり，この後1回の操作ですべてのコインが裏向きになるのは，⑤ を選ぶときである．

よって，2回ですべてのコインが裏向きになるのは，②，⑤ の順に選ぶか，⑤，② の順に選ぶ場合の2通りあるから



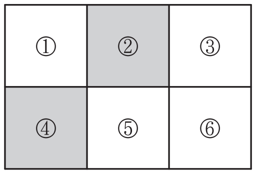


図1

$$p_2 = \frac{2}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

（2） n 回後にすべてのコインが裏向きであるのは，どのコインも奇数回裏返される場合である．なお，「裏返される」と「選ばれる」は意味が違うことに注意する．

各コインが裏返されるのは，どのコインが選ばれる場合かを調べると，次の表になる．

裏返される	①	②	③	④	⑤	⑥
選ばれる	②，④	①，③，⑤	②，⑥	①，⑤	②，④，⑥	③，⑤

①，②，③，④，⑤，⑥ が選ばれる回数をそれぞれ a，b，c，d，e，f とすると，各コインが裏返される回数がすべて奇数であることから

$b+d=$（奇数）……Ⓐ

$a+c+e=$（奇数）……Ⓑ

$b+f=$（奇数）……Ⓒ

$a+e=$（奇数）……Ⓓ

$b+d+f=$（奇数）……Ⓔ

$c+e=$（奇数）……Ⓕ

Ⓐ，Ⓔ より f は偶数で，Ⓒ，Ⓔ より d は偶数である．Ⓑ，Ⓓ より c は偶数で，Ⓑ，Ⓕ より a は偶数である．よって，Ⓐ より b は奇数で，Ⓓ より e は奇数である．

$A=$ {②，⑤}，$B=$ {①，③，④，⑥}

（3） 操作を4回行うとき，② と ⑤ はともに奇数回選ばれるから，少なくとも1回ずつ選ばれる．①，③，④，⑥ がいずれも偶数回選ばれることに注意して，残り2回に A，B どちらのコインが選ばれるかで場合分けする．

（ア） ② と ⑤ のうち一方が3回，もう一方が1回選ばれるとき

② と ⑤ のうち，3回選ばれるコインは2通りある．そのコインを Ⓧ，もう一方のコインを Ⓨ とすると，4回の操作で選ばれるコインの順序は，Ⓧ，Ⓧ，Ⓧ，Ⓨ の順列を考えて，${}_4\mathrm{C}_3=4$ 通りある．よって，$2\cdot4=8$ 通りある．

（イ） ② と ⑤ が1回ずつ選ばれ，①，③，④，⑥ のうち1つだけが2回選ばれるとき

①，③，④，⑥ のうち，選ばれるコインは 4 通りある．そのコインを ⓧ とすると，4 回の操作で選ばれるコインの順序は，②，⑤，ⓧ，ⓧ の順列を考えて，$\dfrac{4!}{2!}=12$ 通りある．よって，$4\cdot12=48$ 通りある．

以上より

$$p_4=\frac{8+48}{6^4}=\frac{56}{6^4}=\boldsymbol{\frac{7}{162}}$$