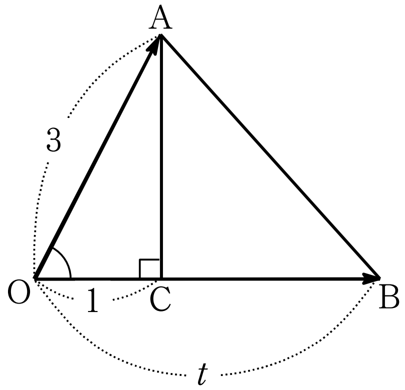
2025 大阪大学（前期）数学（文系）解答例

$\boxed{1}$ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = t\ (t > 0)$

(1) $\angle\mathrm{AOB}$ は鋭角，$\mathrm{OA} = 3$，$\mathrm{OB} = t$，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C，$\mathrm{OC} = 1$ とするので



$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{1}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB} = 3\cdot t\cdot\frac{1}{3}$$
$$= \boldsymbol{t}$$

(2) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点を P とするので

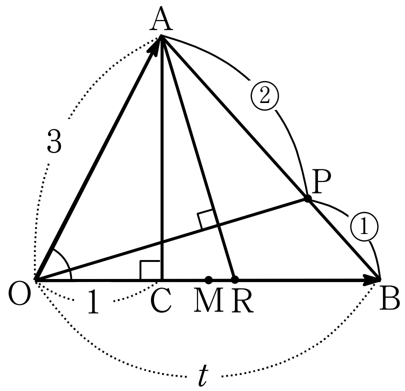
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB の交点を R とするので，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \cdots\cdots①$$

と表せて

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$= \frac{1}{3}\left\{-\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + (k-2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2k\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{-9 + (k-2)t + 2kt^2\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{t(2t+1)k - 2t - 9\right\}$$



$\overrightarrow{\mathrm{AR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$ であることから

$$t(2t+1)k - 2t - 9 = 0$$

$t > 0$ より $t(2t+1) > 0$ であるから

$$k = \frac{2t+9}{t(2t+1)}\ (> 0)\ \cdots\cdots②$$

① から $\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right| = k\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \dfrac{2t+9}{t(2t+1)}\cdot t = \dfrac{2t+9}{2t+1}$

よって，線分 OR の長さを t を用いて表すと $\boldsymbol{\dfrac{2t+9}{2t+1}}$

(3) 線分 OB の中点を M とし，点 R が線分 MB 上にあるとき，① を考えて $\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1$ を満たす．

② から $\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{2t+9}{t(2t+1)} \leqq 1$

$t(2t+1) > 0$ に注意して，整理すると

$$\begin{cases} 2t^2 - 3t - 18 \leqq 0 \\ 2t^2 - t - 9 \geqq 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} \dfrac{3-3\sqrt{17}}{4} \leqq t \leqq \dfrac{3+3\sqrt{17}}{4} \\ t \leqq \dfrac{1-\sqrt{73}}{4},\ \dfrac{1+\sqrt{73}}{4} \leqq t \end{cases}$$

よって，$t > 0$ であるから $\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{73}}{4} \leqq t \leqq \dfrac{3+3\sqrt{17}}{4}}$

$\boxed{2}$

■ 解答例 □

(1) $a_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}a_n$ より，

$$a_{k+1} = \frac{2k-1}{2k}a_k,\ a_{\ell+1} = \frac{2\ell-1}{2\ell}a_\ell$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{k}{k+\ell-1}a_{k+1}a_\ell + \frac{\ell}{k+\ell-1}a_k a_{\ell+1} &= \frac{k}{k+\ell-1}\cdot\frac{2k-1}{2k}a_k a_\ell + \frac{\ell}{k+\ell-1}a_k\cdot\frac{2\ell-1}{2\ell}a_\ell \\ &= \frac{2k-1}{2(k+\ell-1)}a_k a_\ell + \frac{2\ell-1}{2(k+\ell-1)}a_k a_\ell \\ &= \left\{\frac{2k-1}{2(k+\ell-1)} + \frac{2\ell-1}{2(k+\ell-1)}\right\}a_k a_\ell \\ &= \frac{2k+2\ell-2}{2k+2\ell-2}a_k a_\ell \\ &= a_k a_\ell\end{aligned}$$

【証明終了】

(2)　正の整数 m に対して

$$\sum_{k=1}^{m} a_k a_{m-k+1} = 1 \ \cdots \ ①$$

が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

(i) $m=1$ のとき, $a_1 = 1$ より,

$$\sum_{k=1}^{1} a_k a_{1-k+1} = \sum_{k=1}^{1} a_k a_{2-k} = a_1 a_1 = 1 \cdot 1 = 1$$

となるので, ① は成り立つ.

(ii) $m=i$ のとき, ① が成り立つと仮定する. つまり,

$$\sum_{k=1}^{i} a_k a_{i-k+1} = 1$$

が成り立つと仮定すると, (1) で示した式の ℓ に $\ell = i-k+1$ を代入して,

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=1}^{i} a_k a_{i-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{i} \left\{ \frac{k}{k+(i-k+1)-1} a_{k+1} a_{i-k+1} + \frac{i-k+1}{k+(i-k+1)-1} a_k a_{i-k+2} \right\} \\
&= \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \{ k a_{k+1} a_{i-k+1} + (i-k+1) a_k a_{i-k+2} \} \\
&= \frac{1}{i} \left\{ \sum_{k=1}^{i} k a_{k+1} a_{i-k+1} + i \sum_{k=1}^{i} a_k a_{i-k+2} - \sum_{k=1}^{i} (k-1) a_k a_{i-k+2} \right\} \\
&= \frac{1}{i} \left(\sum_{k=1}^{i} k a_{k+1} a_{i-k+1} + i \sum_{k=1}^{i} a_k a_{i-k+2} - \sum_{k=1}^{i-1} k a_{k+1} a_{i-k+1} \right) \\
&= \frac{1}{i} \left(i a_{i+1} a_1 + i \sum_{k=1}^{i} a_k a_{i-k+2} \right) \\
&= a_{i+1} a_1 + \sum_{k=1}^{i} a_k a_{i-k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{i+1} a_k a_{(i+1)-k+1}
\end{aligned}$$

よって, $m = i+1$ のときも ① は成り立つ.

したがって, 正の整数 m に対して, ① は成り立つ.

【証明終了】

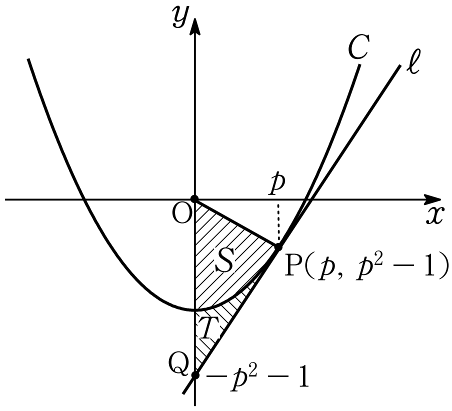
$\boxed{3}$ $C : y = x^2 - 1$

C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2-1)$ における接線を ℓ とすると

点 P は y 軸上にないので $p \neq 0$ であり，$y' = 2x$ より

$$\ell : y = 2p(x-p) + p^2 - 1$$
$$= 2px - p^2 - 1$$

ℓ と y 軸の交点を Q とすると　$\mathrm{Q}(0,\ -p^2-1)$



$\mathrm{O}(0,\ 0)$ とし，C と線分 OP および y 軸で囲まれた図形の面積を S，C と ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を T とすると，△OPQ の面積は $S+T$ である．

C が y 軸に関して対称であることから，$p>0$ として考えると

$$S+T = \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot(\text{P の } x \text{ 座標}) = \frac{1}{2}(p^2+1)p$$
$$= \frac{p^3}{2} + \frac{p}{2}$$

$$T = \int_0^p \{(x^2-1)-(2px-p^2-1)\}\,dx = \int_0^p (x-p)^2\,dx = \left[\ \frac{(x-p)^3}{3}\ \right]_0^p$$
$$= \frac{p^3}{3}$$

$$S-T = (S+T)-2T = \frac{p^3}{2} + \frac{p}{2} - 2\cdot\frac{p^3}{3}$$
$$= -\frac{p^3}{6} + \frac{p}{2}$$

$$f(p) = -\frac{p^3}{6} + \frac{p}{2}\ (p>0)$$

とすると

$$f'(p) = -\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(p+1)(p-1)$$

$f(p)$ の増減は右のような表になる．

p	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(p)$		$+$	0	$-$
$f(p)$		↗	$\frac{1}{3}$	↘

よって，$S-T$ の最大値は $\mathbf{\dfrac{1}{3}}$