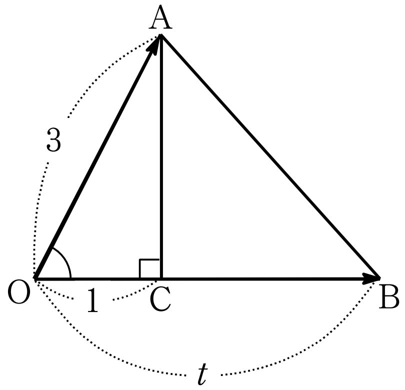
2025 大阪大学（前期）数学（理系）解答例

1　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 3,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = t\ (t > 0)$

(1)　$\angle\mathrm{AOB}$ は鋭角，$\mathrm{OA} = 3$，$\mathrm{OB} = t$，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C，$\mathrm{OC} = 1$ とするので



$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{1}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB} = 3\cdot t\cdot\frac{1}{3}$$
$$= \boldsymbol{t}$$

(2)　線分 AB を $2:1$ に内分する点を P とするので

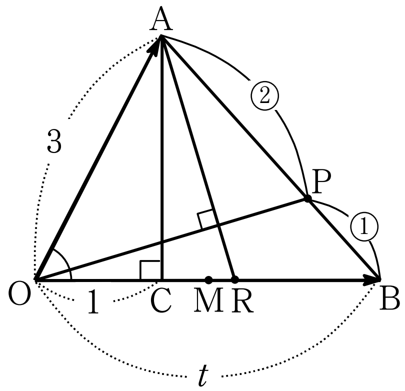
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB の交点を R とするので，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots\cdots①$$

と表せて

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$= \frac{1}{3}\left\{-\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + (k-2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2k\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{-9 + (k-2)t + 2kt^2\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{t(2t+1)k - 2t - 9\right\}$$



$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ なので　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$　であることから

$$t(2t+1)k - 2t - 9 = 0$$

$t > 0$ より $t(2t+1) > 0$ であるから

$$k = \frac{2t+9}{t(2t+1)}\ (>0)\quad\cdots\cdots②$$

① から　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right| = k\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \dfrac{2t+9}{t(2t+1)}\cdot t = \dfrac{2t+9}{2t+1}$

よって，線分 OR の長さを t を用いて表すと　$\boldsymbol{\dfrac{2t+9}{2t+1}}$

(3)　線分 OB の中点を M とし，点 R が線分 MB 上にあるとき，① を考えて　$\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1$　を満たす．

② から　$\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{2t+9}{t(2t+1)} \leqq 1$

$t(2t+1) > 0$ に注意して，整理すると

$$\begin{cases} 2t^2 - 3t - 18 \leqq 0 \\ 2t^2 - t - 9 \geqq 0 \end{cases}\quad \text{すなわち}\quad \begin{cases} \dfrac{3-3\sqrt{17}}{4} \leqq t \leqq \dfrac{3+3\sqrt{17}}{4} \\ t \leqq \dfrac{1-\sqrt{73}}{4},\ \dfrac{1+\sqrt{73}}{4} \leqq t \end{cases}$$

よって，$t > 0$ であるから　$\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{73}}{4} \leqq t \leqq \dfrac{3+3\sqrt{17}}{4}}$

$\boxed{2}$

■解答例□

(1)
$$f(x) = x^3 + 3px^2 + 3mx$$
$$f'(x) = 3x^2 + 6px + 3m$$

関数 $f(x)$ は $x = \alpha$ で極大値をとり，$x = \beta$ で極小値をとるので，2 次方程式 $f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ．

これより，2 次方程式 $\frac{1}{3}f'(x) = 0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = p^2 - m > 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

この条件のもとで，2 次方程式 $f'(x) = 0$ を解くと，

$$x = -p \pm \sqrt{p^2 - m}$$

右の増減表より，$\alpha < \beta$ であるので，$\alpha = -p - \sqrt{p^2 - m}$，$\beta = -p + \sqrt{p^2 - m}$

これより，

$$\beta - \alpha = \left(-p + \sqrt{p^2 - m}\right) - \left(-p - \sqrt{p^2 - m}\right) = 2\sqrt{p^2 - m}$$

であることと，α，β が $f'(x) = 0$ の実数解であることを用いると，

$$f(\alpha) - f(\beta) = \int_\beta^\alpha f'(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta \left(3x^2 + 6px + 3m\right)dx$$
$$= -\int_\alpha^\beta 3(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -3 \cdot \left\{-\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3\right\}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{p^2 - m}\right)^3 = \underline{4\left(\sqrt{p^2 - m}\right)^3}$$

(2) $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ なので，(1) の結果より，

$$4\left(\sqrt{p^2 - m}\right)^3 = 4$$
$$\left(\sqrt{p^2 - m}\right)^3 = 1$$

$\sqrt{p^2 - m}$ は実数なので，$\sqrt{p^2 - m} = 1$，すなわち $p^2 - m = 1$（これは $(*)$ を満たす）

以上より，$m = p^2 - 1$

次に，$f''(x) = 6x + 6p$ であることから，$f''(x) = 0$ を満たす x は $x = -p$ であり，$f''(x)$ の符号は $x = -p$ の前後で変化する．

また，

$$f(-p) = -p^3 + 3p^3 - 3mp = 2p^3 - 3p\left(p^2 - 1\right) = -p^3 + 3p$$

であるから，変曲点の座標を (X, Y) とすると，

$$(X, Y) = \left(-p,\ -p^3 + 3p\right)$$

これより p を消去すると，$Y = X^3 - 3X$ を得る．

以上より，曲線 $y = f(x)$ の変曲点の軌跡は，$\underline{\text{曲線 } y = x^3 - 3x}$

3 点 $\mathbf{P}(x, y, 0)$ が $\angle\mathbf{OAP} = 30^\circ$ を満たす条件は,

$$\begin{cases} (x, y, 0) \neq (0, 0, 0), (x, y, 0) \neq (0, 1, 1) & \cdots[\mathbf{1}] \\ \text{かつ} & \\ (\overrightarrow{\mathbf{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AP}} =) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left|\overrightarrow{\mathbf{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{AP}}\right|\cos 30^\circ & \cdots[\mathbf{2}] \end{cases}$$

である.

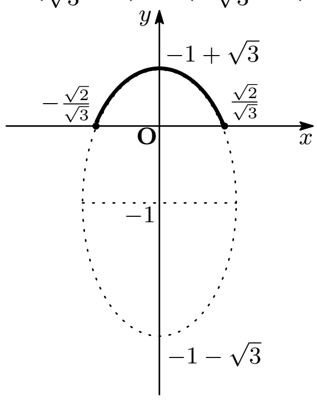
[**1**] より,$(x, y) \neq (0, 0)$ である.

このもとで,[**2**] を変形すると,

$$\begin{aligned} &-(y-1)+1 = \sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2+(-1)^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &2(-y+2) = \sqrt{6}\sqrt{x^2+(y-1)^2+1} \\ &4(-y+2)^2 = 6\{x^2+(y-1)^2+1\} \text{ かつ } -y+2 \geqq 0 \\ &y \leqq 2 \text{ かつ } x^2 + \frac{(y+1)^2}{3} = 1 \end{aligned}$$

となる.

以上と $y \geqq 0$ に注意すると, 点 $\mathbf{P}$ の動きうる範囲は,xy 平面上の楕円 $x^2 + \dfrac{(y+1)^2}{3} = 1$ の $y \geqq 0$ の部分であり, 図示すると, 下図の太線部分になる. なお, 点 $\mathbf{P}$ が動きうる部分の端点の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)$ と $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)$ である.



よって, 点 $\mathbf{P}(x, y, 0)$ に対して,$x = \cos\theta$, $\dfrac{y+1}{\sqrt{3}} = \sin\theta$, すなわち,$x = \cos\theta$, $y = \sqrt{3}\sin\theta - 1$($\theta$ は実数) と表せて,θ のとりうる値の範囲は $\alpha \leqq \theta \leqq \pi - \alpha$ としてよい. ただし,α とは,

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$$

を満たす実数である.

この θ を用いると,

$$(x+1)(y+1) = (\cos\theta+1)(\sqrt{3}\sin\theta - 1 + 1) = \sqrt{3}\sin\theta(\cos\theta+1)$$

となり, これを $f(\theta)$ とおくと,

$$f'(\theta) = \sqrt{3}\{\cos\theta(\cos\theta+1) + \sin\theta(-\sin\theta)\} = \sqrt{3}(2\cos\theta - 1)(\cos\theta+1)$$

となるので,$f(\theta)$ の増減は以下のようになる.

θ	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\pi-\alpha$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ここで,

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{9}{4} \\
f(\alpha) &= \sqrt{3}\sin\alpha(\cos\alpha+1) = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+1\right) = \frac{3+\sqrt{6}}{3} \\
f(\pi-\alpha) &= \sqrt{3}\sin\alpha(-\cos\alpha+1) = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+1\right) = \frac{3-\sqrt{6}}{3} \quad \text{(これは } f(\alpha) \text{ より小さい)}
\end{aligned}
$$

であるから, 上の増減表より, $f(\theta)$, すなわち, $(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値は以下のようになる.

$$
\begin{cases}
\text{最大値} & \dfrac{9}{4} \\
\text{最小値} & \dfrac{3-\sqrt{6}}{3}
\end{cases}
$$

4 (1) $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より $-\dfrac{1}{x^2} \leqq \dfrac{\sin x}{x^2} \leqq \dfrac{1}{x^2}$ …① が成り立つから，

$$-\int_t^{2t} \frac{1}{x^2}dx \leqq \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}dx \leqq \int_t^{2t} \frac{1}{x^2}dx$$

であり，さらに

$$\int_t^{2t} \frac{1}{x^2}dx = -\left[\frac{1}{x}\right]_t^{2t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2t} = \frac{1}{2t}$$

であることから

$$-\frac{1}{2t} \leqq \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}dx \leqq \frac{1}{2t} \quad \cdots ②$$

である。

$t>0$ より $\dfrac{1}{2t} < \dfrac{1}{t}$，$-\dfrac{1}{t} < -\dfrac{1}{2t}$ であり，これと②より，

$$-\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}dx < \frac{1}{t}$$

が成り立つ。

(2) (1)の結果および $\lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} = 0$ より $\lim_{t\to\infty} \displaystyle\int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}dx = 0$ …③ である。

部分積分法により

$$\int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}dx = \left[-\frac{\sin x}{x}\right]_t^{2t} + \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}dx = \frac{\sin t}{t} - \frac{\sin 2t}{2t} + \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}dx$$

となり，これより

$$\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}dx = \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}dx - \frac{\sin t}{t} + \frac{\sin 2t}{2t} \quad \cdots ④$$

を得る. ①を導いたのと同様にして $-\dfrac{1}{t} \leqq \dfrac{\sin t}{t} \leqq \dfrac{1}{t}$,

$-\dfrac{1}{2t} \leqq \dfrac{\sin 2t}{2t} \leqq \dfrac{1}{2t}$ が得られ, これらと $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}=0$,

$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t}=0$ より $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\sin t}{t}=0$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\sin 2t}{2t}=0$ と

なる. これら2式および③をふまえ, ④の両辺で $t\to\infty$ とすれば,

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0-0+0$$
$$=0$$

となる.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x-\cos 2x)$ より,

$$\int_1^t \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^t\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^t \frac{\cos x}{x}\,dx-\frac{1}{2}\int_2^{2t}\frac{\cos x'}{\frac{x'}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,dx'$$

$\left(\displaystyle\int_1^t \frac{\cos 2x}{x}\,dx\right.$ において, $2x=x'$ と置換した$\Big)$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_1^t \frac{\cos x}{x}\,dx+\int_{2t}^{2}\frac{\cos x'}{x'}\,dx'\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_1^t \frac{\cos x}{x}\,dx+\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}\,dx+\int_{2t}^{2}\frac{\cos x}{x}\,dx\right.$$
$$\left.-\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx-\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}\,dx\right)$$

である. これと(2)の結果から,

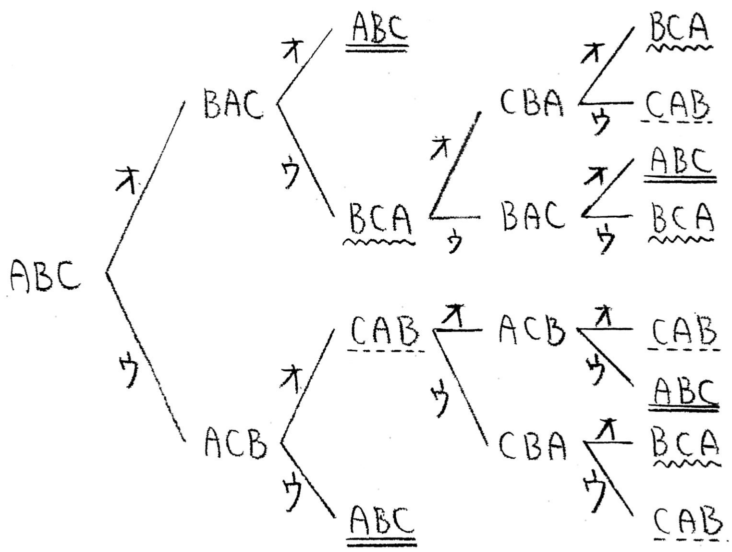
$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{f(x)}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left(\int_1^2 \frac{\cos x}{x}dx - \int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\cos x}{x}dx - 0 = \frac{1}{2}\int_1^2\frac{\cos x}{x}dx$$

である。

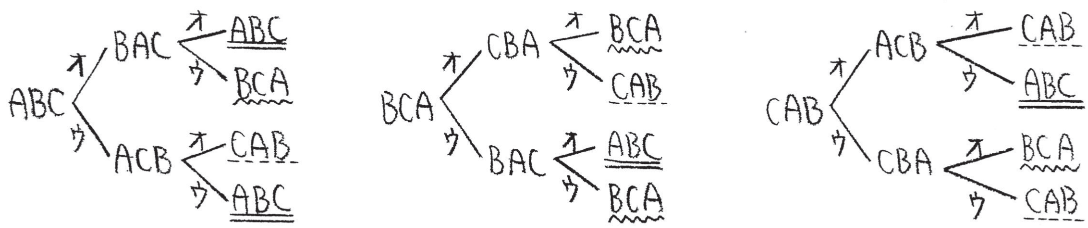
5

文字列の変化を書き出すと、



…(※)

ABC、BCA、CAB からコインを2回投げ、2回の操作での文字列の変化は下のようになる。



…(※※)

(※)より2回、4回の操作後に現れる文字列は ABC, BCA, CAB であり、(※※)より偶数回目の操作後に現れる文字列は ABC、BCA、CAB に限ることがわかる。

(1) コインをn回続けて投げたあとの文字列がCABである確率をr_nとすると、

$$p_{2(k+1)} = p_{2k}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+q_{2k}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+r_{2k}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}p_{2k}+\frac{1}{4}q_{2k}+\frac{1}{4}r_{2k} \quad\cdots①$$

$$q_{2(k+1)} = p_{2k}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+q_{2k}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+r_{2k}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}p_{2k}+\frac{1}{2}q_{2k}+\frac{1}{4}r_{2k} \quad\cdots②$$

$$r_{2(k+1)} = p_{2k}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+q_{2k}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+r_{2k}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}p_{2k}+\frac{1}{4}q_{2k}+\frac{1}{2}r_{2k} \quad\cdots③$$

①、②より

$$p_{2(k+1)}-q_{2(k+1)}=\left(\frac{1}{2}p_{2k}+\frac{1}{4}q_{2k}+\frac{1}{4}r_{2k}\right)-\left(\frac{1}{4}p_{2k}+\frac{1}{2}q_{2k}+\frac{1}{4}r_{2k}\right)$$
$$=\frac{1}{4}p_{2k}-\frac{1}{4}q_{2k}$$
$$=\frac{1}{4}(p_{2k}-q_{2k})$$

$p_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $q_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ より

$$p_{2k}-q_{2k}=(p_2-q_2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$$

(2) ②、③より

$$q_{2(k+1)}-r_{2(k+1)}=\frac{1}{4}(q_{2k}-r_{2k})$$

$q_2=\frac{1}{4}$, $r_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ より

$$q_{2k}-r_{2k}=(q_2-r_2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=0$$

よって、(1)の結果と $q_{2k}=r_{2k}$ を①に代入すると、

$$p_{2(k+1)}=\frac{1}{2}p_{2k}+\frac{1}{4}q_{2k}+\frac{1}{4}q_{2k}$$
$$=\frac{1}{2}p_{2k}+\frac{1}{2}\left\{p_{2k}-\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\right\}$$
$$=p_{2k}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$$

$k\geqq 2$ のとき

$$p_{2k}=p_2+\sum_{m=1}^{k-1}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{m}\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

$p_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ より $k=1$ のときも成り立つ。

したがって、

$$p_{2k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right\}^{k-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2}=\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

また、文字列 ABC、BCA、CAB から1回の操作で ABC となることはないので、奇数回目の操作後に文字列 ABC が現れることはない。

これらのことより、確率 p_n は

n が偶数のとき $p_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$、$n$ が奇数のとき $p_n=0$