1.

■ 解答例 □

(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos x + 1$ で「積和の公式」より，

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{24}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{24} + 1 \\
&= \sin\frac{5}{24}\pi\cos\frac{\pi}{24} + 1 \\
&= \frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{5}{24}\pi + \frac{\pi}{24}\right) + \sin\left(\frac{5}{24}\pi - \frac{\pi}{24}\right)\right\} + 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{6}\right) + 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + 1 \\
&= \underline{\frac{\sqrt{2}+5}{4}}
\end{aligned}$$

(2)　(1) と同様にして，$f(x) = \sin(x+\theta)\cos x + 1$ を変形すると，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\{\sin(x+\theta+x) + \sin(x+\theta-x)\} + 1 \\
&= \frac{1}{2}\sin(2x+\theta) + \frac{1}{2}\sin\theta + 1
\end{aligned}$$

となるので，

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos(2x+\theta)\cdot 2 = \cos(2x+\theta)$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$2x+\theta$ のとりうる値の範囲は

$$\theta \leqq 2x+\theta \leqq \pi+\theta$$

であるので，

(i)　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x)$ の増減表は下のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(ii)　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x)$ の増減表は下のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	

(i)，(ii) より，どちらの場合においても，$f(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}$ で最大となることがわかる．

よって, $f(x)$ の最大値 $g(\theta)$ は,

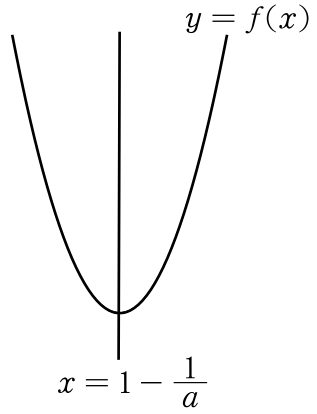
$$\begin{aligned} g(\theta) &= f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta+1 \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

したがって, 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta g(\theta)\,d\theta$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta g(\theta)\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}\right)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\theta\right)'\,d\theta \\ &= \left[\theta\left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\theta\right)\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi - \left[-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{3}{4}\theta^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{8}\pi^2+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{8}\pi^2+\frac{1}{2}-\frac{3}{16}\pi^2 \\ &= \underline{\frac{3}{16}\pi^2+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2. a を 0 でない整数として

$$f(x)=a^2x^2-2a(a-1)x+2$$
$$=a^2\left\{x-\left(1-\frac{1}{a}\right)\right\}^2-a^2+2a+1$$



$y=f(x)$ のグラフは $a^2>0$ より下に凸，

直線 $x=1-\dfrac{1}{a}$ に関して対称になる放物線.

n を整数とするとき

$$f(n)=a^2n^2-2a(a-1)n+2$$
$$=a^2\left\{n-\left(1-\frac{1}{a}\right)\right\}^2-a^2+2a+1$$

$f(n)$ が最小になるのは，$y=f(x)$ のグラフを考えて，

n が $1-\dfrac{1}{a}$ に最も近い整数の場合であり，$f(n)$ の最小値を $m(a)$ とする.

(1)　$a=2$，n を整数とするとき

$$f(n)=4n^2-4n+2$$
$$=4\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+1$$

ゆえに　$m(2)=f(0)=f(1)=2$

よって，$f(n)$ の最小値は $\mathbf{2\ (n=0,\ 1)}$

［補足］　$\cdots>f(-2)>f(-1)>f(0)=f(1)<f(2)<f(3)<\cdots$

(2)　$a>0$，n を整数とするとき

あ　$a=1$ ならば　$f(n)=n^2+2$

ゆえに　$m(1)=f(0)=2$

い　$a=2$ ならば　(1) より　$m(2)=f(0)=f(1)=2$

う　$a\geqq 3$ ならば　$\left(\dfrac{1}{2}<\right)\dfrac{2}{3}\leqq 1-\dfrac{1}{a}<1$

ゆえに　$m(a)=f(1)=-a^2+2a+2$

よって，$f(n)$ の最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=1}\ \text{ならば}\ \boldsymbol{2\ (n=0)} \\ \boldsymbol{a=2}\ \text{ならば}\ \boldsymbol{2\ (n=0,\ 1)} \\ \boldsymbol{a\geqq 3}\ \text{ならば}\ \boldsymbol{-a^2+2a+2\ (n=1)} \end{cases}$$

(3)　$a<0$，n を整数とするとき

ア　$a=-1$ ならば　$f(n)=(n-2)^2-2$

ゆえに　$m(-1)=f(2)=-2$

イ　$a=-2$ ならば　$f(n)=4n^2-12n+2=4\left(n-\dfrac{3}{2}\right)^2-7$

ゆえに　$m(-2)=f(1)=f(2)=-6$

ウ　$a\leqq -3$ ならば　$1<1-\dfrac{1}{a}\leqq\dfrac{4}{3}\ \left(<\dfrac{3}{2}\right)$

ゆえに　$m(a)=f(1)=-a^2+2a+2$

よって，$f(n)$ の最小値は

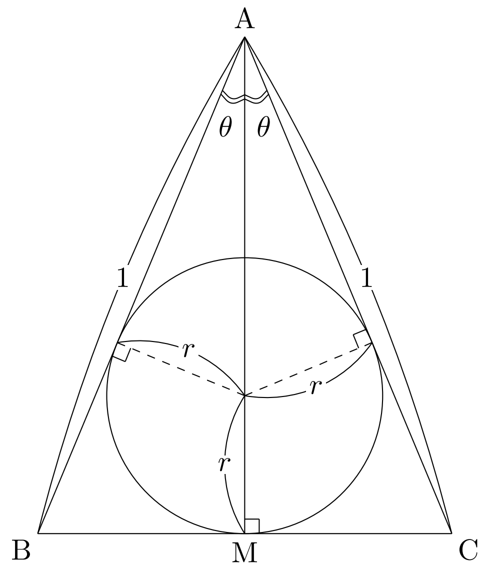
$$\begin{cases} \boldsymbol{a=-1}\ \text{ならば}\ \boldsymbol{-2\ (n=2)} \\ \boldsymbol{a=-2}\ \text{ならば}\ \boldsymbol{-6\ (n=1,\ 2)} \\ \boldsymbol{a\leqq -3}\ \text{ならば}\ \boldsymbol{-a^2+2a+2\ (n=1)} \end{cases}$$

3.

■ 解答例 □

(1) $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$，$\angle\mathrm{CAB}=2\theta$ である三角形 ABC の面積 S_1 は，

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 2\theta=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}\sin 2\theta}$$



$\angle\mathrm{CAB}$ の二等分線と辺 BC の交点を M とすると，

$\mathrm{BM}=\mathrm{CM}$，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ であるので，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，

三角形 ABM に注目して，

$$\mathrm{BC}=2\mathrm{BM}=2\cdot\mathrm{AB}\sin\theta=2\sin\theta$$

次に，三角形 ABC の内接円の半径を r とすると，

$$S_1=\frac{r}{2}(1+1+2\sin\theta)=r(1+\sin\theta)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$1+\sin\theta>0$ であるので，

$$r=\frac{S_1}{1+\sin\theta}$$

三角形 ABC の内接円の面積 S_2 は，

$$S_2=\pi r^2=\frac{{S_1}^2}{(1+\sin\theta)^2}\pi=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{\sin^2 2\theta}{4(1+\sin\theta)^2}\pi}$$

(2) (1) より，

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{S_1}{(1+\sin\theta)^2}\pi=\frac{\sin 2\theta}{(1+\sin\theta)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

ここで，$f(\theta)=\dfrac{\sin 2\theta}{(1+\sin\theta)^2}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$\begin{aligned}
f'(\theta)&=\frac{2\cos 2\theta(1+\sin\theta)^2-\sin 2\theta\cdot 2(1+\sin\theta)\cdot\cos\theta}{(1+\sin\theta)^4}\\
&=\frac{2\left(1-2\sin^2\theta\right)(1+\sin\theta)-4\sin\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^3}\\
&=\frac{2\left(1-2\sin^2\theta\right)(1+\sin\theta)-4\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right)}{(1+\sin\theta)^3}\\
&=\frac{2\left(1-2\sin^2\theta\right)(1+\sin\theta)-4\sin\theta(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)^3}\\
&=\frac{2\left(1-2\sin^2\theta-2\sin\theta+2\sin^2\theta\right)}{(1+\sin\theta)^2}=\frac{2(1-2\sin\theta)}{(1+\sin\theta)^2}
\end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$f'(\theta)=0$ となる θ は，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

右の増減表より，$f(\theta)$ の最大値は，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

以上より，$\dfrac{S_2}{S_1}=f(\theta)\cdot\dfrac{\pi}{2}$ の最大値は，

$$\theta=\frac{\pi}{6}\text{のとき最大値}\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

θ	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	(0)	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	(0)

4．

解答例　すべての自然数 n に対して,$x_n+y_n+z_n=1\cdots[1]$ が成り立つ.

(1)　まずは,x_{n+1} について考える．S_{n+1} を 3 で割った余りが 0 となるための条件は,「S_n を 3 で割った余りが 0 であり $a_{n+1}=0$ または 3 となる」または「S_n を 3 で割った余りが 1 であり $a_{n+1}=2$ となる」または「S_n を 3 で割った余りが 2 であり $a_{n+1}=1$ または 4 となる」であり, これら 3 つの事象は互いに排反であるから,

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=\frac{2}{5}x_n+\frac{1}{5}y_n+\frac{2}{5}z_n=\frac{2}{5}x_n+\frac{1}{5}y_n+\frac{2}{5}(1-x_n-y_n)\quad(\text{[1] を用いた})\\&=-\frac{1}{5}y_n+\frac{2}{5}\end{aligned}$$

とわかる.

以上と同様に考えて,

$$\begin{aligned}y_{n+1}&=\frac{2}{5}x_n+\frac{2}{5}y_n+\frac{1}{5}z_n=\frac{2}{5}x_n+\frac{2}{5}y_n+\frac{1}{5}(1-x_n-y_n)\quad(\text{[1] を用いた})\\&=\frac{1}{5}x_n+\frac{1}{5}y_n+\frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_{n+1}&=\frac{1}{5}x_n+\frac{2}{5}y_n+\frac{2}{5}z_n=\frac{1}{5}x_n+\frac{2}{5}y_n+\frac{2}{5}(1-x_n-y_n)\quad(\text{[1] を用いた})\\&=-\frac{1}{5}x_n+\frac{2}{5}\end{aligned}$$

(2)　(1) の結果を用いて, 以下の計算を行う．すべての自然数 n に対して

$$\begin{aligned}x_{n+3}&=-\frac{1}{5}y_{n+2}+\frac{2}{5}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x_{n+1}+\frac{1}{5}y_{n+1}+\frac{1}{5}\right)+\frac{2}{5}=-\frac{1}{25}(x_{n+1}+y_{n+1})+\frac{9}{25}\\&=-\frac{1}{25}(1-z_{n+1})+\frac{9}{25}\quad(\text{[1] を用いた})\\&=\frac{1}{25}z_{n+1}+\frac{8}{25}=\frac{1}{25}\left(-\frac{1}{5}x_n+\frac{2}{5}\right)+\frac{8}{25}\\&=-\frac{1}{125}x_n+\frac{42}{125}\end{aligned}$$

が成り立つ.

(3)　$S_0=0$ として定めると,$(x_0,y_0,z_0)=(1,0,0)$ であり, このとき (1),(2) で求めた漸化式は,0 以上のすべての整数 n に対して成り立つ．さらに,$b_0=x_{3\cdot 0}=x_0$ と定めると,(2) で求めた漸化式より,

$$b_{n+1}=x_{3n+3}=-\frac{1}{125}x_{3n}+\frac{42}{125}=-\frac{1}{125}b_n+\frac{42}{125}$$

すなわち,

$$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{125}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

が成り立つ.

以上より,0 以上のすべての整数 n に対して

$$b_n-\frac{1}{3}=\left(b_0-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{125}\right)^n=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{125}\right)^n$$

が成り立ち, すべての自然数 n に対して

$$b_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{125}\right)^n$$

が成り立つ.

5. $ax^2 \leqq 1-\cos x \leqq bx^2 \cdots ①$

(i) $x=0$ のとき

① $\Longleftrightarrow a\cdot 0 \leqq 0 \leqq b\cdot 0$ であり，この不等式はあらゆる実数 a, b に対して成り立つ．

(ii) $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2} \cdots ②$ のとき

$$① \Longleftrightarrow a \leqq \frac{1-\cos x}{x^2} \leqq b$$

$$\Longleftrightarrow a \leqq \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} \leqq b$$

$$\Longleftrightarrow a \leqq \frac{2\sin^2 t}{(2t)^2} \leqq b$$

$$\Longleftrightarrow a \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \leqq b \cdots ③$$

である．ただし，$t=\dfrac{x}{2}$ とした．② より t のとりうる値の範囲は $0 < t \leqq \dfrac{\pi}{4} \cdots ②'$ となる．

ここで $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ とすると，

$$f'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} \cdots ④$$

である．加えて $g(t) = t\cos t - \sin t$ とすると，

$$g'(t) = \cos t - t\sin t - \cos t$$
$$= -t\sin t$$

であり，②′ において $g'(t) < 0$，すなわち $g(t)$ は単調に減少する．さらに $g(0)=0$ より，②′ において $g(t) < 0$ であり，これと ④ より ②′ において $f'(t) < 0$，すなわち $f(t)$ は単調に減少する．すると $\displaystyle\lim_{t\to+0} f(t) = 1$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$ も

ふまえ，②′における $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ のとりうる値の範囲は
$\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} \leqq f(t) < 1$ となる．

よって②′における③の中辺のとりうる値の範囲は

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)^2=\right)\ \frac{4}{\pi^2} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 < \frac{1}{2}\ \left(=\frac{1}{2}\cdot 1^2\right)$$

であり，これより②′を満たすすべての t について③が成り立つような a の最大値，b の最小値はそれぞれ $\dfrac{4}{\pi^2}$，$\dfrac{1}{2}$ である．

(i)，(ii) より，求める a の最大値は $\dfrac{4}{\pi^2}$，b の最小値は $\dfrac{1}{2}$ である．