1.

■ 解答例 □

(1) 方程式 $f(x)=0$ は $x=-1$ を解にもつとするので，$f(-1)=0$ であるから，

$$f(-1)=a-3=0$$

よって，$\underline{a=3}$

このとき，$f(x)=2x^3+3x^2-1=(x+1)^2(2x-1)$

方程式 $f(x)=0$ の解は，$(x+1)^2(2x-1)=0$ より，$\underline{x=-1,\ \frac{1}{2}}$

(2) $a=3$ のとき，

$$f(x)=2x^3+3x^2-1$$
$$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$$

$f'(x)=0$ とすると，$x=-1$，0

$f(x)$ の増減は次の表のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

関数 $f(x)$ の極値は，$\underline{\text{極大値 } 0,\ \text{極小値 } -1}$

(3) 方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつ条件は，

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$$

のグラフが相異なる 3 つの共有点をもつことである．

$$f'(x)=6x^2+2ax=2x(3x+a)$$

$f'(x)=0$ とすると，$x=-\frac{a}{3}$，0

$-\frac{a}{3}=0$，つまり $a=0$ とすると，$f'(x)=6x^2 \geqq 0$

$f(x)$ は単調に増加するので，条件を満たさない．

$a \neq 0$ のもとで，$f(x)$ の増減は次の表のようになる．

[$a>0$ のとき]

x	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

[$a<0$ のとき]

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

極値になる 2 つの値は,

$$f(0) = -1$$

$$f\left(-\frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27} - 1$$

条件は極大値が正かつ極小値が負になることであるが，$f(0) < 0$ なので,

$$a > 0 \text{ かつ } f\left(-\frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27} - 1 > 0 \qquad \text{すなわち，} a^3 > 27$$

よって，求める a の値の範囲は，$a > 3$

2.

■ 解答例 □

(1)　$(n+1)^2-(\sqrt{n^2+1}\,)^2=n^2+2n+1-(n^2+1)=2n>0$ より，

$$(\sqrt{n^2+1}\,)^2<(n+1)^2$$

よって，$\sqrt{n^2+1}>0,\ n+1>0$ より，

$$\sqrt{n^2+1}<n+1$$

$$a_n<n+1$$

が成り立つ．

【証明終了】

(2)　$n=\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+1}$ と，(1) で示した不等式より，

$$n<a_n<n+1$$

よって，a_n を超えない最大の整数が n とわかるから，a_n の小数部分 b_n は，

$$b_n=a_n-n=\sqrt{n^2+1}-n$$

(3)　$m,\ n$ を異なる 2 つの自然数とするとき，$b_m=b_n$ であると仮定すると，(2) の結果より，

$$\sqrt{m^2+1}-m=\sqrt{n^2+1}-n$$

$$\sqrt{m^2+1}+n=\sqrt{n^2+1}+m$$

よって，両辺正より，両辺を 2 乗すると，

$$m^2+1+2n\sqrt{m^2+1}+n^2=n^2+1+2m\sqrt{n^2+1}+m^2$$

$$n\sqrt{m^2+1}=m\sqrt{n^2+1}$$

$$\sqrt{m^2n^2+n^2}=\sqrt{m^2n^2+m^2}$$

$$m^2n^2+n^2=m^2n^2+m^2$$

$$m^2-n^2=0$$

$$(m-n)(m+n)=0$$

$m,\ n$ は自然数であるから，$m+n\fallingdotseq 0$ より，

$$m-n=0$$

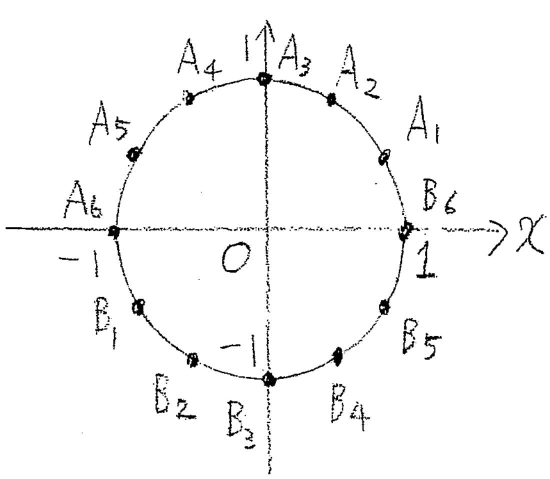
$$m=n$$

しかし，m と n は異なる 2 つの自然数であるので，矛盾する．

したがって，$m,\ n$ を異なる 2 つの自然数とするとき，$b_m\fallingdotseq b_n$ である．

【証明終了】

3. $A_a\left(\cos\frac{a}{6}\pi, \sin\frac{a}{6}\pi\right)$, $B_b\left(\cos\frac{b+6}{6}\pi, \sin\frac{b+6}{6}\pi\right)$ とすると（a, b は1以上6以下の整数），A_a $(1 \leqq a \leqq 6)$, B_b $(1 \leqq b \leqq 6)$ は右図のような単位円上に，角 $\frac{\pi}{6}$ 間隔で並んでいる．…(＊) このとき，それぞれの a, b の値に対する $\angle A_aOB_b$ $(0 < \angle A_aOB_b \leqq \pi)$ の大きさは右下の表のようになる．



また2回のさいころの目の出方は全部で $6^2 = 36$ 通りだけある．

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
2	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
3	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
4	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$
5	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$
6	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

(1) (＊)の下では，

3点 O, A_a, B_b が一直線上にある

$\iff \angle A_aOB_b = \pi$ …①

であり，表より①を満たす a, b の組は6個だけある．よって求める確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ である．

(2) 三角形 OA_aB_b の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2} OA_a \cdot OB_b \sin\angle A_aOB_b$$
$$= \frac{1}{2}\sin\angle A_aOB_b$$

であるから，(＊)の下では，

3点 O, A_a, B_b が一直線上になく，かつ $S \leqq \frac{1}{4}$ である

$\iff \angle A_aOB_b \neq \pi$，かつ $\sin\angle A_aOB_b \leqq \frac{1}{2}$

$\iff \angle A_aOB_b \neq \pi$，かつ $\left(\angle A_aOB_b = \dfrac{\pi}{6}\right.$ または $\left.\angle A_aOB_b = \dfrac{5}{6}\pi\right) \cdots ②$

であり，表より②を満たす a, b の組は 12 個だけある．よって

求める確率は $\dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$ である．

(3)
$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{A_aB_b}|^2 &= |\overrightarrow{OB_b} - \overrightarrow{OA_a}|^2 \\
&= |\overrightarrow{OA_a}|^2 + |\overrightarrow{OB_b}|^2 - 2\overrightarrow{OA_a}\cdot\overrightarrow{OB_b} \\
&= |\overrightarrow{OA_a}|^2 + |\overrightarrow{OB_b}|^2 - 2|\overrightarrow{OA_a}||\overrightarrow{OB_b}|\cos\angle A_aOB_b \\
&= 2 - 2\cos\angle A_aOB_b
\end{aligned}
$$

であるから，(※)の下では

2 点 A_a, B_b 間の距離が 1 以下である

$\iff 2 - 2\cos\angle A_aOB_b \leqq 1$

$\iff \cos\angle A_aOB_b \geqq \dfrac{1}{2}$

$\iff \angle A_aOB_b = \dfrac{\pi}{6}$ または $\angle A_aOB_b = \dfrac{\pi}{3} \cdots ③$

であり，表より③を満たす a, b の組は 6 個だけある．余事象を考えることにより，求める確率は $1 - \dfrac{6}{36} = \dfrac{5}{6}$ である．