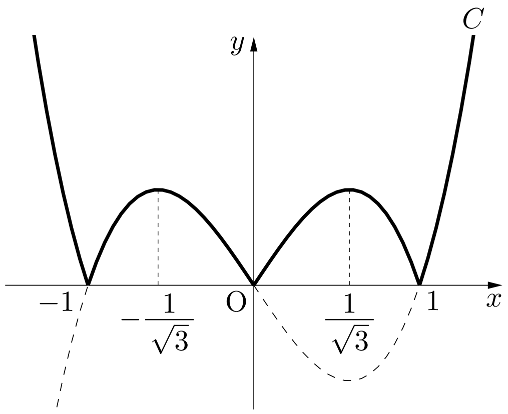
1.

■ 解答例 □

(1)
$$C : y = f(x) = |x^3 - x| = |x(x+1)(x-1)|$$
$$= \begin{cases} x^3 - x & (-1 \leqq x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \\ -x^3 + x & (x \leqq -1,\ 0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

$y = x^3 - x$ について，$y' = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗



曲線 C の $x \leqq -1$，$0 \leqq x \leqq 1$ の部分を表す式は，$y = -\left(x^3 - x\right)$ であり，この区間の曲線 C のグラフは $y = x^3 - x$ のグラフを x 軸に関して折り返したものである．

よって，曲線 C の概形は右図のようになる．

(2) 直線 $\ell : y = k(x+1)$ は定点 $(-1,\ 0)$ を通り，傾き k の直線である．

曲線 C と直線 ℓ は k の値によらず共有点 $(-1,\ 0)$ をもつ．

曲線 C と直線 ℓ がちょうど 4 つの共有点をもつ条件は，$-1 < x < 0$，$0 < x < 1$，$1 < x$ のそれぞれで共有点を 1 つずつもつことである．

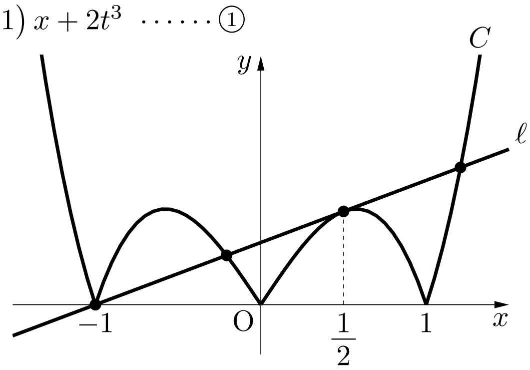
特に，$0 < x < 1$ でちょうど 1 つの共有点をもつ条件は，曲線 C と直線 ℓ が接することである．

$y = -x^3 + x$ について，$y' = -3x^2 + 1$ であるから，曲線 C 上の点 $\left(t,\ -t^3 + t\right)$ $(0 < t < 1)$ における曲線 C の接線の方程式は，
$$y = \left(-3t^2 + 1\right)(x - t) - t^3 + t = \left(-3t^2 + 1\right)x + 2t^3 \quad \cdots\cdots ①$$

これが点 $(-1,\ 0)$ を通るとすると，
$$0 = -\left(-3t^2 + 1\right) + 2t^3$$
$$2t^3 + 3t^2 - 1 = 0$$
$$(t+1)^2(2t - 1) = 0$$

$0 < t < 1$ であるから，$t = \dfrac{1}{2}$

このとき，① は，$y = \dfrac{1}{4}(x+1)$



これが直線 ℓ となる場合に限り，曲線 C と直線 ℓ はちょうど 4 つの共有点をもつ．

よって，求める k の値は，$k = \dfrac{1}{4}$

2．

解答例

(1) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ $(\cdots[1])$ であり,n は自然数であるから,

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leqq \frac{1}{\sqrt{1^2+1}+1} < 1$$

が成り立つ.

よって,$0 < a_n < 1$ が成り立つ.

(2) (1) より,$3n - \dfrac{1}{a_n} = 3n - (\sqrt{n^2+1}+n) = 2n - \sqrt{n^2+1}$ である.

ここで,$n = \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+2n+1} = \sqrt{(n+1)^2} = n+1$ より,

$$n < \sqrt{n^2+1} < n+1$$

であり, これより

$$\begin{aligned} &-(n+1) < -\sqrt{n^2+1} < -n \\ &2n-(n+1) < 2n - \sqrt{n^2+1} < 2n - n \\ &n-1 < 3n - \frac{1}{a_n} < n \end{aligned}$$

となる.

これより, $\left(3n - \dfrac{1}{a_n}\right)$ を超えない最大の整数は $n-1$ とわかり, 求める小数部分 b_n は

$$b_n = (2n - \sqrt{n^2+1}) - (n-1) = \underline{n+1-\sqrt{n^2+1}}$$

(3) すべての自然数 n に対して,

$$\begin{aligned} &\sqrt{n^2+1}+n < \sqrt{(n+1)^2+1}+n+1 \\ &\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}+n+1} \end{aligned}$$

が成り立つので,[1] より, すべての自然数 n に対して,$a_n > a_{n+1}$ が成り立つ.

よって, 数列 $\{a_n\}$ は単調に減少する数列となるので, 異なる自然数 m, n に対して $a_m \neq a_n$ が成り立ち, これを言い換えると,

$$\begin{aligned} &\sqrt{m^2+1} - m \neq \sqrt{n^2+1} - n \\ &(\sqrt{m^2+1} - m) + (n+1-\sqrt{n^2+1}) \neq 1 \\ &a_m + b_n \neq 1 \end{aligned}$$

が成り立つ.

したがって, 示された.

別解

(2) (1) の結果から,

$$-1 < n - \sqrt{n^2+1} < 0$$

$$0 < n+1-\sqrt{n^2+1} < 1$$

であり,[1] より,

$$3n - \frac{1}{a_n} = 3n - (\sqrt{n^2+1}+n) = 2n - \sqrt{n^2+1} = n-1+(n+1-\sqrt{n^2+1})$$

であるから,$\left(3n - \dfrac{1}{a_n}\right)$ を超えない最大の整数は $n-1$ とわかり, 求める小数部分 b_n は

$$b_n = \{n-1+(n+1-\sqrt{n^2+1})\}-(n-1) = n+1-\sqrt{n^2+1}$$

3.

$x(\theta)=\sin\theta$, $y(\theta)=\cos\theta+|\sin\theta|$ とする.

(1) $0\leqq\theta\leqq\pi$ を満たすあらゆる θ に対して

$$\begin{aligned}x(2\pi-\theta)&=\sin(2\pi-\theta)\\&=-\sin\theta\\&=-x(\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(2\pi-\theta)&=\cos(2\pi-\theta)+|\sin(2\pi-\theta)|\\&=\cos\theta+|\sin\theta|\\&=y(\theta)\end{aligned}$$

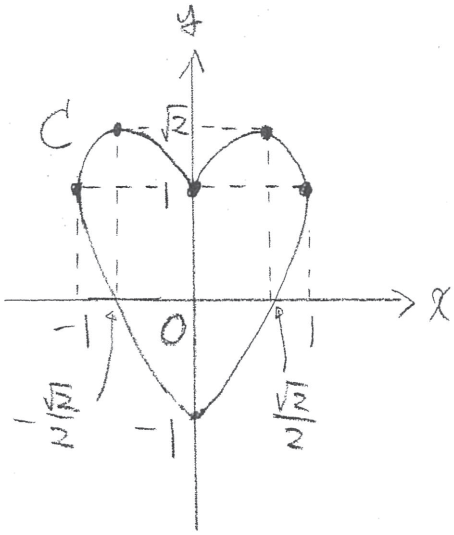
が成り立つから, 曲線 C のうち $0\leqq\theta\leqq\pi$ における部分と $\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ における部分は y 軸に関して対称である. よって本問は $0\leqq\theta\leqq\pi$ について考えれば十分である. このとき $y(\theta)=\cos\theta+\sin\theta$ である.

$$x'(\theta)=\cos\theta$$

$$\begin{aligned}y'(\theta)&=-\sin\theta+\cos\theta\\&=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$x'(\theta)$		$+$		$+$	0	$-$	
$y'(\theta)$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x(\theta), y(\theta))$	$(0, 1)$	$\nearrow$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$	$\searrow$	$(1, 1)$	$\swarrow$	$(0, -1)$

$x(\theta)$, $y(\theta)$ の増減は上表のようになる. これと上で述べた対称性から C の概形は次図のようになる.



(2) 求める面積を S とする. (1)で述べた対称性から,

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} y(\theta)\,x'(\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

となり, 求める面積は $S = \underline{\pi}$ である.

4.

■ 解答例 □

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 1,\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(s+4,\ t+1,\ -2s+t-1)$ である.

3 点 A, B, P が一直線上にあるとすると, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する.

$$(s+4,\ t+1,\ -2s+t-1)=k(1,\ 1,\ -1)=(k,\ k,\ -k)$$

より, 各成分を比較すると,

$$\begin{cases} s+4=k \cdots ① \\ t+1=k \cdots ② \\ -2s+t-1=-k \cdots ③ \end{cases}$$

①, ② より, $s=k-4$, $t=k-1$ となり, これらを ③ に代入すると,

$$-2(k-4)+k-1-1=-k$$
$$-k+6=-k$$

となるが, この式が成り立つような実数 k は存在しない.

よって, 3 点 A, B, P は一直線上にない.

【証明終了】

(2)　点 H は直線 AB 上にあるので, 実数 u を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=u\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表せるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,\ -1,\ 0)+u(1,\ 1,\ -1)=(-4+u,\ -1+u,\ -u)$$

よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=(-4+u,\ -1+u,\ -u)-(s,\ t,\ -2s+t-1)\\&=(-4+u-s,\ -1+u-t,\ -u+2s-t+1)\end{aligned}$$

であり, $\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから,

$$(-4+u-s)\cdot 1+(-1+u-t)\cdot 1+(-u+2s-t+1)\cdot(-1)=0$$
$$-4+u-s-1+u-t+u-2s+t-1=0$$
$$3u=3s+6$$
$$\therefore\quad u=s+2$$

したがって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(-4+s+2,\ -1+s+2,\ -(s+2))=(s-2,\ s+1,\ -s-2)$$

より, 点 H の座標を s を用いて表すと,

$$\mathrm{H}\ (s-2,\ s+1,\ -s-2)$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(-4+s+2-s,\ -1+s+2-t,\ -(s+2)+2s-t+1)=(-2,\ s-t+1,\ s-t-1)$ より,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=\sqrt{(-2)^2+(s-t+1)^2+(s-t-1)^2}=\sqrt{2(s-t)^2+6}$$

よって, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{3}$ より, 三角形 ABP の面積は,

$$\frac{1}{2}\times\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\times\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2(s-t)^2+6}$$

となり, これは $s=t$ のとき最小となるので, その最小値は,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

5．

解答例

$t \geqq 1$ を満たす t に対して

$$g(t) = \sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2}$$

であり,$t > 1$ を満たす t に対して

$$h(t) = \int_1^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

が成り立つ.

(1) $1 < x < t$ $(t > 1)$ に対して,$f(x) - xf'(x) = 0$ を言い換えると,

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = 0$$

であるから,$1 < x < t$ で $\dfrac{f(x)}{x}$ は定数である.

また,$x \geqq 0$ において $f(x)$ は連続より,$1 \leqq x \leqq t$ において $\dfrac{f(x)}{x}$ も連続となるので,$1 \leqq x \leqq t$ で $\dfrac{f(x)}{x}$ は定数である.

(2) $t \geqq 1$ を満たす任意の t に対して,$g(t) = h(t) + 2$, すなわち,

$$\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2} = \int_1^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx + 2$$

が成り立つ.

$t > 1$ の範囲で, 上式の両辺を t で微分すると

$$\frac{t + f(t)f'(t)}{\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2}} = \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}$$

が成り立ち, この等式を言い換えると,

$$t + f(t)f'(t) = \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2}$$
$$\{t + f(t)f'(t)\}^2 = \left(1 + \{f'(t)\}^2\right)\left(t^2 + \{f(t)\}^2\right) \text{ かつ } t + f(t)f'(t) \geqq 0$$
$$\{f(t)\}^2 - 2tf(t)f'(t) + t^2\{f'(t)\}^2 = 0 \text{ かつ } t + f(t)f'(t) \geqq 0$$
$$\{f(t) - tf'(t)\}^2 = 0 \text{ かつ } t + f(t)f'(t) \geqq 0$$
$$\underbrace{f(t) - tf'(t) = 0}_{[1]} \text{ かつ } \underbrace{t + f(t)f'(t) \geqq 0}_{[2]}$$

が成り立つ.

[1] が成り立つとき,$t + f(t)f'(t) = t + t\{f'(t)\}^2 \geqq 0$ となるので,[2] が成り立つ. よって,「[1] かつ [2]」は [1] と同値である.

$t > 1$ を満たす任意の t で [1] が成り立つから,(1) の結果より,$t \geqq 1$ で

$$\frac{f(t)}{t} = C(\text{定数}) \quad \text{すなわち} \quad f(t) = Ct \quad \cdots [3]$$

とおける.

ここで,$g(1) = h(1) + 2$ かつ $h(1) = 0$ であることに注意すると,

$$\sqrt{1 + \{f(1)\}^2} = 2 \quad \text{すなわち} \quad \{f(1)\}^2 = 3$$

であり,$x \geqq 0$ で $f(x) \geqq 0$ を満たすから,$f(1) = \sqrt{3}$ とわかる.

一方,[3] より,$f(1) = C$ であるから,$C = \sqrt{3}$ とわかり,

$$f(t) = \sqrt{3}t$$

が得られる.