［1］

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ -2,\ 12)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ -2,\ 8)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルを $\vec{n}=(p,\ q,\ 1)$ とおくと

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2p-2q+12=0$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-2q+8=0$$

よって，$p=2$，$q=4$，$\vec{n}=(2,\ 4,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\vec{n}=(a+2s,\ b+4s,\ s+t)$ (s は実数) と表せる．

Q は xy 平面上の点だから，$s+t=0$，$s=-t$

よって， $\mathrm{Q}(a-2t,\ b-4t,\ 0)$ ……(答)

(2) $\mathrm{OQ}^2=(a-2t)^2+(b-4t)^2$

$$=20t^2-4(a+2b)t+a^2+b^2$$

$$=20\left(t-\frac{a+2b}{10}\right)^2-\frac{(a+2b)^2}{5}+a^2+b^2$$

$$=20\left(t-\frac{a+2b}{10}\right)^2+\frac{(2a-b)^2}{5}$$

OQ の最小値が 1 以下であるから

$$\frac{|2a-b|}{\sqrt{5}}\leqq 1$$

よって，a，b の条件は $|2a-b|\leqq\sqrt{5}$ ……(答)

［2］

(1) $y=\tan x$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+y^2 \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) x と y の対応は右のようになる

x	$0\to\frac{\pi}{4}$
y	$0\to 1$

よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^4 x-\tan^2 x-2}{\tan^2 x-4}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{y^4-y^2-2}{y^2-4}\cdot\frac{1}{y^2+1}\,dy$$

$$=\int_0^1\frac{y^2-2}{y^2-4}\,dy$$

$$=\int_0^1\left(1+\frac{2}{y^2-4}\right)dy$$

$$=\int_0^1\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y+2}\right)\right\}dy$$

$$=\left[y+\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-2}{y+2}\right|\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{2}\log 3 \quad \cdots\cdots(答)$$

［3］

(1) $n=8k+r$ (k は整数，$r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7$) とおくと

$$n^2=64k^2+16kr+r^2=8(8k^2+2kr)+r^2$$

よって，n^2 を 8 で割った余りは，r^2 を 8 で割った余りに一致する．

r	0	1	2	3	4	5	6	7
r^2	0	1	4	9	16	25	36	49
余り	0	1	4	1	0	1	4	1

であるから，n^2 を 8 で割った余りは 0，1，4 のいずれかである（証明終）

(2) $2^m=n^2+3$ ……①

n は奇数であるから，$n=2l+1$ (l は整数) とおくと

①より，

$$2^m=4l^2+4l+1+3=4(l^2+l+1) \quad \cdots\cdots②$$

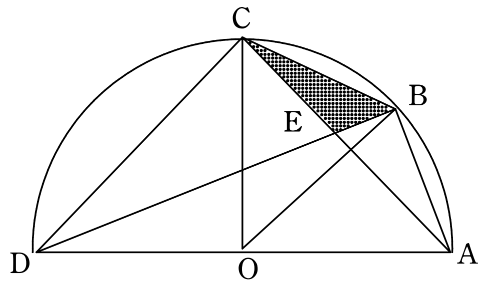
$l^2+l+1=l(l+1)+1$ は奇数であるから，② より

$$2^m=2^2,\ l^2+l+1=1$$

$n\geqq 0$ より，$l\geqq 0$ であるから，$l=0$

よって，$(m,\ n)=(2,\ 1)$ ……(答)

［4］



(1) CA＝CDより，$\angle \mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}$

よって，AB＝BCより，$\angle \mathrm{AOB}=\angle \mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$

$\angle \mathrm{ACB}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{8}$ ……(答)

(2)余弦定理より，

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$$

よって，$\mathrm{BC}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ……(答)

(3) $\angle \mathrm{ABC}=\pi-(\angle \mathrm{BAC}+\angle \mathrm{BCA})=\pi-\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\frac{3}{4}\pi$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$\angle \mathrm{BDC}=\dfrac{\pi}{8}=\angle \mathrm{ADB}$ より，BD は $\angle \mathrm{ADC}$ を二等分するから

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=\mathrm{OA}:\mathrm{OC}=2:\sqrt{2}=\sqrt{2}:1$$

よって，

$$\triangle \mathrm{BCE}=\triangle \mathrm{ABC}\times\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$ ……(答)

［5］

⑴　$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-ax+b=0$ ……① または $x=c$

$f(x)=0$ を満たす実数 x の個数が 1 個であるのは

（i）① が虚数解をもつ.

（ii）① が $x=c$ を重解にもつ.

の場合である.

（i）のとき，① の判別式を D とおくと，

$$D=a^2-4b<0 \Leftrightarrow a^2<4b$$

$b=1$ のとき，$a^2<4$ より，$a=1$

$b=2$ のとき，$a^2<8$ より，$a=1,\ 2$

$b=3$ のとき，$a^2<12$ より，$a=1,\ 2,\ 3$

$b=4$ のとき，$a^2<16$ より，$a=1,\ 2,\ 3$

$b=5$ のとき，$a^2<20$ より，$a=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$b=6$ のとき，$a^2<24$ より，$a=1,\ 2,\ 3,\ 4$

よって，$(a,\ b,\ c)$ の組は 17×6 通り

（ii）のとき，解と係数の関係から

$$c+c=a,\ c^2=b$$

よって，$(a,\ b,\ c)$ の組は $(2,\ 1,\ 1)$，$(4,\ 4,\ 2)$ の 2 通り

よって，求める確率は

$$\frac{17\times6+2}{6^3}=\frac{104}{6^3}=\frac{13}{27}$$ ……(答)

⑵ ① の 2 つの自然数の解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$$

$\alpha\beta=b\leqq6$ より

$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 2), (1,\ 3), (1,\ 4), (1,\ 5), (1,\ 6), (2,\ 3)$

このとき，

$(a,\ b)=(3,\ 2), (4,\ 3), (5.\ 4), (6,\ 5), (7,\ 6), (5,\ 6)$

$(a, b)=(7,\ 6)$ は不適で，他の $(a,\ b)$ の組については c は 4 通り.

よって，求める確率は

$$\frac{5\times4}{6^3}=\frac{5}{54}$$ ……(答)