［1］

$f(x)=x^3+x^2-x-1$ とおく．

$f'(x)=3x^2+2x-1$ より $y=f(x)$ の接線の方程式は，

$$y-(t^3+t^2-t-1)=(3t^2+2t-1)(x-t)$$

よって， $y=(3t^2+2t-1)x-2t^3-t^2-1$

これと $y=x^2$ が接する条件は

$$x^2=(3t^2+2t-1)x-2t^3-2t-1$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-(3t^2+2t-1)x+2t^3+t^2+1=0$$

が重解をもつことであり，この方程式の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}D&=(3t^2+2t-1)^2-4(2t^3+t^2+1)\\&=9t^4+4t^3-6t^2-4t-3\\&=(t-1)(9t^3+13t^2+7t+3)\\&=(t-1)(t+1)(9t^2+4t+3)\\&=0\end{aligned}$$

ここで，t は実数であるから，

$$9t^2+4t+3=9\left(t+\frac{2}{9}\right)^2+\frac{23}{9}>0 \text{ より，} t=\pm1$$

以上より，求める直線の方程式は，

$y=4x-4$ ，　$y=0$　……(答)

［2］

図のように，原点中心，半径 1 の円 C 上に $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$をとり，

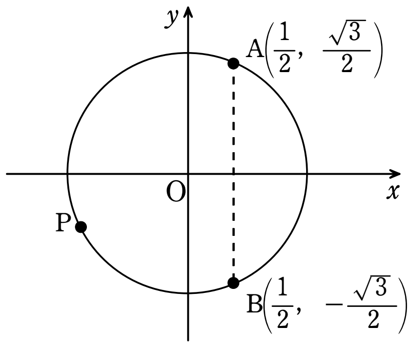
$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=2\sin^2\theta+2\cos^2\theta-2\cos\theta+2$$

$$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\cos\theta+2$$

$$=-2\cos\theta+4$$



$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より，$\cos\theta=-1$ つまり $\theta=\pi$ のとき，

最大値 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=6$ ……(答)

［3］

(1) $n=8k+r$ (k は整数，$r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7$) とおくと

$$n^2=64k^2+16kr+r^2=8(8k^2+2kr)+r^2$$

よって，n^2 を 8 で割った余りは，r^2 を 8 で割った余りに一致する．

r	0	1	2	3	4	5	6	7
r^2	0	1	4	9	16	25	36	49
余り	0	1	4	1	0	1	4	1

であるから，n^2 を 8 で割った余りは 0，1，4 のいずれかである（証明終）

(2) $2^m=n^2+3$ ……①

n は奇数であるから，$n=2l+1$ (l は整数) とおくと

①より，

$$2^m=4l^2+4l+1+3=4(l^2+l+1) \quad \cdots\cdots②$$

$l^2+l+1=l(l+1)+1$ は奇数であるから，② より

$$2^m=2^2,\quad l^2+l+1=1$$

$n\geqq 0$ より，$l\geqq 0$ であるから，$l=0$

よって，$(m,\ n)=(2,\ 1)$ ……(答)

［4］

⑴　$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-ax+b=0$ ……① または $x=c$

$f(x)=0$ を満たす実数 x の個数が 1 個であるのは

（i）① が虚数解をもつ.

（ii）① が $x=c$ を重解にもつ.

の場合である.

（i）のとき，① の判別式を D とおくと，

$$D=a^2-4b<0 \Leftrightarrow a^2<4b$$

$b=1$ のとき，$a^2<4$ より，$a=1$

$b=2$ のとき，$a^2<8$ より，$a=1,\ 2$

$b=3$ のとき，$a^2<12$ より，$a=1,\ 2,\ 3$

$b=4$ のとき，$a^2<16$ より，$a=1,\ 2,\ 3$

$b=5$ のとき，$a^2<20$ より，$a=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$b=6$ のとき，$a^2<24$ より，$a=1,\ 2,\ 3,\ 4$

よって，$(a,\ b,\ c)$ の組は 17×6 通り

（ii）のとき，解と係数の関係から

$$c+c=a,\quad c^2=b$$

よって，$(a,\ b,\ c)$ の組は $(2,\ 1,\ 1)$，$(4,\ 4,\ 2)$ の 2 通り

よって，求める確率は

$$\frac{17\times 6+2}{6^3}=\frac{104}{6^3}=\frac{13}{27}$$ ……(答)

⑵ ① の 2 つの自然数の解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと

$$\alpha+\beta=a,\quad \alpha\beta=b$$

$\alpha\beta=b\leqq 6$ より

$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 2), (1,\ 3), (1,\ 4), (1,\ 5), (1,\ 6), (2,\ 3)$

このとき，

$(a,\ b)=(3,\ 2), (4,\ 3), (5.\ 4), (6,\ 5), (7,\ 6), (5,\ 6)$

$(a, b)=(7,\ 6)$ は不適で，他の $(a,\ b)$ の組については c は 4 通り.

よって，求める確率は

$$\frac{5\times 4}{6^3}=\frac{5}{54}$$ ……(答)