$\boxed{1}$ 問 1　$2025^x = 3^y = 5^z = k$ とすると（k は正の実数），

$$\log_3 2025^x = \log_3 3^y = \log_3 5^z = \log_3 k$$

$$x \log_3(3^4 \cdot 5^2) = y \log_3 3 = z \log_3 5 = K$$

$$x(4 + 2\log_3 5) = y = z\log_3 5 = K$$

$$x(4+2a) = y = za = K$$

となる．ただし $K = \log_3 k$，$a = \log_3 5$ とした．$a > \log_3 1 = 0$ より，上式から

$$\begin{cases} x = \dfrac{K}{4+2a} \\ y = K \\ z = \dfrac{K}{a} \end{cases}$$

が得られ，

$$2xy + 4xz - yz = 2\cdot\frac{K}{4+2a}\cdot K + 4\cdot\frac{K}{4+2a}\cdot\frac{K}{a} - K\cdot\frac{K}{a}$$

$$= \frac{K^2}{(2+a)a}\{a+2-(2+a)\}$$

$$= 0$$

である．

問2 $$\frac{n^4+6n^2+23}{n^2+n+3}=n^2-n+4+\frac{-n+11}{n^2+n+3}$$

より，n^4+6n^2+23 が n^2+n+3 で割り切れるための条件は $\frac{-n+11}{n^2+n+3}=k$ …① を満たす整数 k が存在することである．

(i) $k=0$ のとき

①より $n=11$ である．

(ii) $k\neq 0$ のとき

①を満たす整数 k が存在するためには $\frac{-n+11}{n^2+n+3}\leqq -1$ …②，または $1\leqq\frac{-n+11}{n^2+n+3}$ …③ が必要である．

$n>0$ のとき $n^2+n+3>0$ である．これと②より

$$-n+11\leqq -(n^2+n+3)$$
$$n^2\leqq -14$$

を得るが，これを満たす正の整数 n は存在しない．

同様に③より

$$n^2+n+3\leqq -n+11$$
$$n^2+2n-8\leqq 0$$
$$(n+4)(n-2)\leqq 0$$

を得るが，これを満たす正の整数 n は $n=1,2$ である．

逆に $n=1,2$ のとき $\frac{-n+11}{n^2+n+3}$ の値はそれぞれ $2, 1$ となり，①を満たす整数 k は存在する．

以上より，求める n の値は $n=1,2,11$ である．

2

■ 解答例 □

実数係数の 2 次式 $f(x)$ を $f(x)=px^2+qx+r\ \ (p \neq 0)$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned} f(f(x))+c &= p\left(px^2+qx+r\right)^2+q\left(px^2+qx+r\right)+r+c \\ &= p^3x^4+2p^2qx^3+p\left(q^2+2pr+q\right)x^2+q(2pr+q)x+pr^2+qr+r+c \end{aligned}$$

であるから，条件 $(*)$ より，

$$(**)\ \begin{cases} p^3=\dfrac{1}{8} & \cdots\cdots ① \\ 2p^2q=a \\ p\left(q^2+2pr+q\right)=b \\ q(2pr+q)=0 \\ pr^2+qr+r+c=0 \end{cases}$$

p は実数であるから，① より，$p=\dfrac{1}{2}$ となる．これを用いると，条件 $(**)$ は，

$$(***)\ \begin{cases} q=2a \\ q^2+q+r=2b \\ q(q+r)=0 \\ r^2+2qr+2r+2c=0 \end{cases}$$

よって，条件 $(***)$ を満たす実数 q，r，c が存在するような a，b の条件を求める．
条件 $(***)$ を満たす実数 q が存在する条件は，

$$\begin{cases} (2a)^2+2a+r=2b \\ 2a(2a+r)=0 \\ r^2+4ar+2r+2c=0 \end{cases} \quad \text{すなわち，} \quad \begin{cases} r=-4a^2-2a+2b \\ a(2a+r)=0 \\ r^2+4ar+2r+2c=0 \end{cases}$$

であり，これを満たす実数 r が存在する条件は，

$$(****)\ \begin{cases} a\left(-4a^2+2b\right)=0 \\ \left(-4a^2-2a+2b\right)^2+(4a+2)\left(-4a^2-2a+2b\right)+2c=0 \end{cases}$$

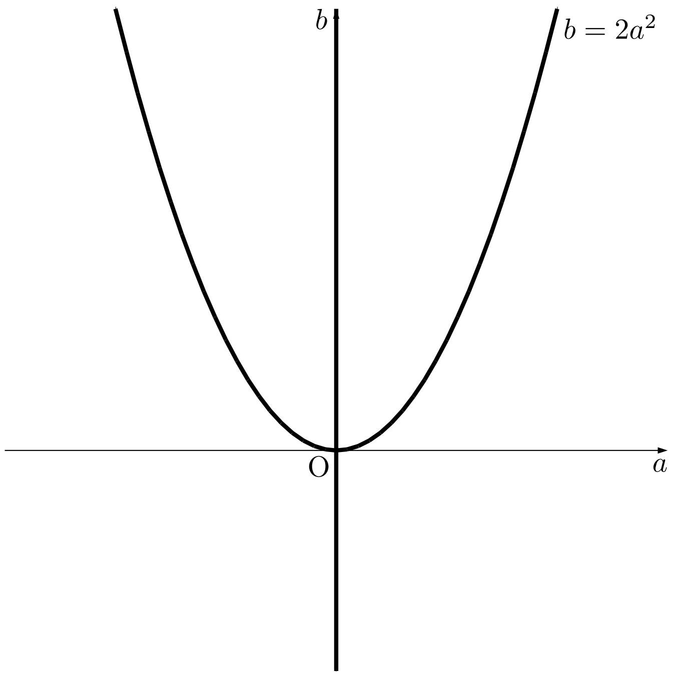
以下，2 つの場合に分けて考える．

- $a=0$ のとき
  条件 $(****)$ は，$c=-2b^2-2b$ と言い換えられて，どんな実数 b に対しても，これを満たす実数 c は存在する．
- $a \neq 0$ のとき
  条件 $(****)$ は，

$$\begin{cases} -4a^2+2b=0 \\ (-2a)^2+(4a+2)(-2a)+2c=0 \end{cases} \quad \text{すなわち，} \begin{cases} b=2a^2 & \cdots\cdots ② \\ c=2a^2+2a & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

となり，② を満たす実数の組 $(a,\ b)$ $(a \neq 0)$ に対して，③ を満たす実数 c が存在する．

以上 2 つの場合より，条件 $(*)$ を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の集合を座標平面上に図示すると，下図の太線部になる．



$\boxed{3}$

■ 解答例 □

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら 1，裏が出たら 2 と記録する試行を繰り返し，n 回目に記録された数字を A_n とする．

ここで，$A_n = 1$，$A_n = 2$ となる確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ である．

記録された数字を左から並べて作る n 桁の数 X を X_n とする．つまり，$X_n = A_1A_2\cdots A_n$

ここで，X_n を 3 で割って余りが 0，1，2 となる確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とすると，

$$a_n + b_n + c_n = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

X_n を 3 で割った余りは，$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ を 3 で割った余りに等しい．

$X_1 = A_1$ であるから，

$$a_1 = 0, \qquad b_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_1 = \frac{1}{2}$$

$(n+1)$ 桁の整数 $X_{n+1} = A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$ が 3 の倍数になる確率 a_{n+1} は，

「X_n を 3 で割って余りが 1 かつ $A_{n+1} = 2$」

または「X_n を 3 で割って余りが 2 かつ $A_{n+1} = 1$」

となる確率であるから，

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(b_n + c_n) \quad \cdots\cdots ② \\ &= \frac{1}{2}(1 - a_n) \quad (\because\ ①) \\ &= -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

変形して，$a_{n+1} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(a_n - \dfrac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は第 1 項 $a_1 - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$a_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

すなわち，$a_n = \dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

対称性から $b_n = c_n$ であるので，② より，

$$b_n = c_n = a_{n+1} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$$

X_n が 6 で割り切れる確率を p_n とすると，$X_1 = A_1$ であるから，$p_1 = 0$

$n \geqq 2$ のとき，X_n が 6 で割り切れる条件は，X_n が 2 の倍数かつ 3 の倍数である，すなわち，

「X_{n-1} を 3 で割って余りが 1 かつ $A_n = 2$」

であるから，

$$p_n = b_{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$n=1$ とすると $p_1=0$ となるから $n=1$ のときもこの式は成り立つ．

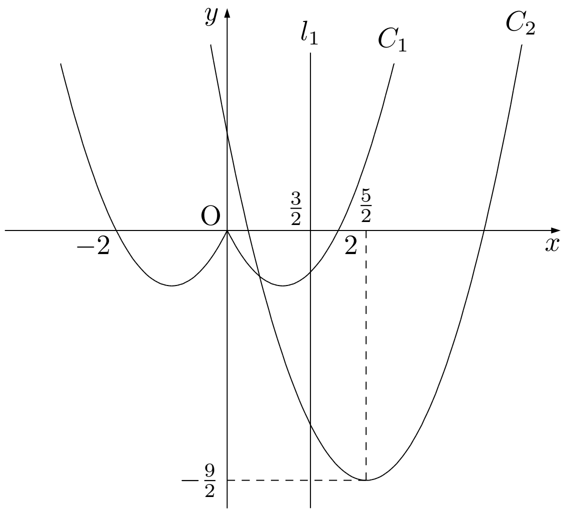
よって，X が 6 で割り切れる確率は，$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\dfrac{1}{6}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$

$\boxed{4}$

■ **解答例** □

$$x^2-2|x|=\begin{cases}x^2-2x\ (x\geqq 0)\\ x^2+2x\ (x\leqq 0)\end{cases},\quad x^2-5x+\frac{7}{4}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$$

より, 曲線 C_1, C_2, 直線 l_1 の概形は下図のようになる.



(1)　曲線 $y=x^2+2x\ (x<0)$ 上の点 $(s,\ s^2+2s)\ (s<0)$ における接線の方程式は, $y'=2x+2$ より,

$$y=(2s+2)(x-s)+s^2+2s=(2s+2)x-s^2\ \cdots ①$$

曲線 C_2 上の点 $\left(t,\ t^2-5t+\frac{7}{4}\right)$ における接線の方程式は, $y'=2x-5$ より,

$$y=(2t-5)(x-t)+t^2-5t+\frac{7}{4}=(2t-5)x-t^2+\frac{7}{4}\ \cdots ②$$

曲線 $y=x^2+2x\ (x<0)$ と接し, 曲線 C_2 とも接するような直線が存在することと, ① と ② が一致するような s, t が存在することが同値であるから,

$$\begin{cases}2s+2=2t-5\ \cdots ③\\ -s^2=-t^2+\frac{7}{4}\ \cdots ④\end{cases}$$

③ から $s=t-\frac{7}{2}$ となり, ④ に代入すると,

$$-\left(t-\frac{7}{2}\right)^2=-t^2+\frac{7}{4}$$

$$-t^2+7t-\frac{49}{4}=-t^2+\frac{7}{4}$$

$$\therefore\ t=2$$

このときの s の値は, $s=2-\frac{7}{2}=-\frac{3}{2}$ となり, $s<0$ を満たす.

曲線 $y=x^2-2x$ $(x>0)$ 上の点 $(u,\ u^2-2u)$ $(u>0)$ における接線の方程式は, $y'=2x-2$ より,

$$y=(2u-2)(x-u)+u^2-2u=(2u-2)x-u^2 \quad \cdots ⑤$$

曲線 $y=x^2-2x$ $(x>0)$ と接し, 曲線 C_2 とも接するような直線が存在することと, ② と ⑤ が一致するような $u,\ t$ が存在することが同値であるから,

$$\begin{cases} 2u-2=2t-5 & \cdots ⑥ \\ -u^2=-t^2+\dfrac{7}{4} & \cdots ⑦ \end{cases}$$

⑥ から $u=t-\dfrac{3}{2}$ となり, ⑦ に代入すると,

$$-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2=-t^2+\frac{7}{4}$$

$$-t^2+3t-\frac{9}{4}=-t^2+\frac{7}{4}$$

$$\therefore\ \ t=\frac{4}{3}$$

このときの u の値は, $u=\dfrac{4}{3}-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{6}$ となり, $u>0$ を満たさない.

したがって, 点 $(0,\ 0)$ と異なる点で C_1 と接し, さらに C_2 とも接するような直線 l_2 はただ一つ存在する.

【証明終了】

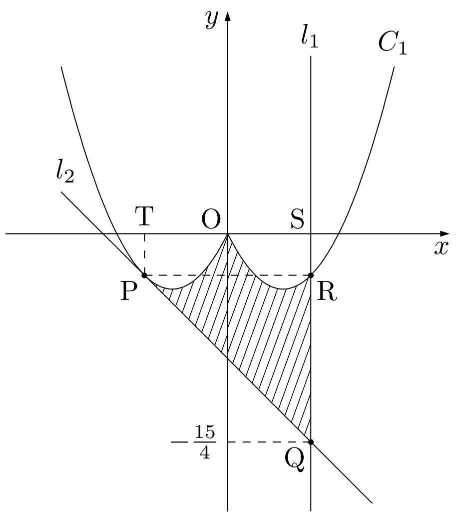
(2)　(1) より, 点 P の座標は $\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$ であるから, $\alpha=-\dfrac{3}{2}$ である.

また, 直線 l_2 の方程式は, ② より,

$$y=(2\cdot 2-5)x-2^2+\frac{7}{4}=-x-\frac{9}{4}$$

であるから, l_1 と l_2 の共有点 Q の座標は $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{15}{4}\right)$ であり, C_1 と l_1 の共有点 R の座標は $\mathrm{R}\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$ である.

これより, 曲線 C_1 の $\alpha \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ の部分, 線分 PQ, および線分 QR で囲まれる図形は, 下図の斜線部分である.



よって, $\mathrm{S}\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$, $\mathrm{T}(\alpha, 0)$ とし, 曲線 C_1 が y 軸に関して対称であることと, $\alpha = -\dfrac{3}{2}$ であることに注意すると, 求める面積は,

$$
\begin{aligned}
(\text{台形 PQST の面積}) - 2\int_0^{\frac{3}{2}} \left\{-(x^2-2x)\right\}\,dx &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{15}{4}\right)\times 3 + 2\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{27}{4} + 2\left(\frac{9}{8} - \frac{9}{4}\right) \\
&= \frac{27}{4} - \frac{9}{4} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

$\boxed{5}$ $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$ とすれば，Pはs, t, uの値に無関係な定点であり，$\overrightarrow{OL}=s\overrightarrow{OA}$ 等をふまえれば，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4s}\overrightarrow{OL}+\frac{1}{2t}\overrightarrow{OM}+\frac{3}{4u}\overrightarrow{ON}$$

となる．今，$\frac{1}{s}+\frac{2}{t}+\frac{3}{u}=4$，すなわち $\frac{1}{4s}+\frac{1}{2t}+\frac{3}{4u}=1$ なので上式で表される点Pは平面LMN上にある（平面LMNは点Pを通る）．

（補題）

上では

点Wが平面XYZ上に存在する

$\iff$ $\overrightarrow{OW}=l\overrightarrow{OX}+m\overrightarrow{OY}+n\overrightarrow{OZ}$ かつ $l+m+n=1$ を満たす実数l, m, nが存在する

であることを既知として用いているが，これを以下に示しておく．

（証明）

点Wが平面XYZ上に存在する

$\iff$ $\overrightarrow{XW}=\alpha\overrightarrow{XY}+\beta\overrightarrow{XZ}$ を満たす実数α, βが存在する

$\iff$ $\overrightarrow{OW}-\overrightarrow{OX}=\alpha(\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX})+\beta(\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OX})$ を満たす実数α, βが存在する

$\iff$ $\overrightarrow{OW}=(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OX}+\alpha\overrightarrow{OY}+\beta\overrightarrow{OZ}$ を満たす実数α, βが存在する

$\iff$ $\overrightarrow{OW}=l\overrightarrow{OX}+m\overrightarrow{OY}+n\overrightarrow{OZ}$ かつ $l+m+n=1$ を満たす実数l, m, nが存在する