$\boxed{\mathbf{1}}$

■ 解答例 □

問 1　$z = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおけるので，

$$\begin{aligned} z - \frac{i}{z} &= 2(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} \\ &= 2(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{1}{2}(\sin\theta + i\cos\theta) \\ &= \left(2\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right) + \left(2\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)i \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \left|z - \frac{i}{z}\right| &= \sqrt{\left(2\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)^2 + \left(2\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)^2} \\ &= \sqrt{4\cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta + 4\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{4 - 2\sin 2\theta + \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{17}{4} - 2\sin 2\theta} \end{aligned}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$ であるから，

$$-2 \leqq 2\sin 2\theta \leqq 2$$
$$\frac{17}{4} - 2 \leqq \frac{17}{4} - 2\sin 2\theta \leqq \frac{17}{4} + 2$$
$$\frac{9}{4} \leqq \frac{17}{4} - 2\sin 2\theta \leqq \frac{25}{4}$$
$$\therefore\ \frac{3}{2} \leqq \left|z - \frac{i}{z}\right| \leqq \frac{5}{2}$$

したがって，求める最大値と最小値は，

最大値：$\frac{5}{2}$，　最小値：$\frac{3}{2}$

別解

三角不等式より，

$$|z| - \left|-\frac{i}{z}\right| \leqq \left|z - \frac{i}{z}\right| \leqq |z| + \left|-\frac{i}{z}\right|$$
$$|z| - \frac{1}{|z|} \leqq \left|z - \frac{i}{z}\right| \leqq |z| + \frac{1}{|z|}$$

が成り立ち，$|z| = 2$ より，

$$2 - \frac{1}{2} \leqq \left|z - \frac{i}{z}\right| \leqq 2 + \frac{1}{2}$$
$$\therefore\ \frac{3}{2} \leqq \left|z - \frac{i}{z}\right| \leqq \frac{5}{2}$$

また，$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ のとき $\frac{3}{2} \leqq \left|z - \frac{i}{z}\right|$ の等号が成り立ち，$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ のとき $\left|z - \frac{i}{z}\right| \leqq \frac{5}{2}$ の等号が成り立つ．

よって, 求める最大値と最小値は,

$$\underset{\sim\sim\sim}{\text{最大値：}\frac{5}{2},\quad \text{最小値：}\frac{3}{2}}$$

問 2 (1)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} + \frac{2x^3+1}{x^2+1} \right) dx \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 2x - \frac{2x-1}{x^2+1} \right) dx \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 2x - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx + \Big[\sqrt{x^2+1} + x^2 - \log|x^2+1| \Big]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} + \sqrt{4} - \sqrt{1} + 3 - \log 4 \quad (\because\ x=\tan\theta \text{と置換した}) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta + 4 - 2\log 2 \\
&= \Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} + 4 - 2\log 2 \\
&= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\pi}{3} + 4 - 2\log 2}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan^2\frac{x}{2}}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\tan\frac{x}{2}\right| dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}\,dx \quad \left(\because\ 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \text{ において } \tan\frac{x}{2} \geqq 0\right) \\
&= \Big[-2\log\left|\cos\frac{x}{2}\right| \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -2\log\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| + 2\log|\cos 0| \\
&= \underset{\sim\sim\sim}{\log 2}
\end{aligned}$$

2 正の整数 x，y，z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4 \quad \cdots\cdots (*)$$

と表される正の整数 N の最小値を求める．

N が最小となるのは z が最小になる場合である．

以下，合同式は 3 を法とする．

$9z^2 \equiv 0$ であるから $(*)$ より $x^6 + y^4 \equiv 0 \quad \cdots\cdots ①$

x と y の少なくとも一方が 3 の倍数ではないと仮定すると，3 の倍数である整数は 0 と合同，

3 の倍数でない整数は ± 1 と合同であることから，下の表のようになる．

x	y	$x^6 + y^4$
3 の倍数でない	3 の倍数でない	$(\pm 1)^6 + (\pm 1)^4 \equiv 1 + 1 \equiv 2$
3 の倍数である	3 の倍数でない	$0^6 + (\pm 1)^4 \equiv 0 + 1 \equiv 1$
3 の倍数でない	3 の倍数である	$(\pm 1)^6 + 0^4 \equiv 1 + 0 \equiv 1$

いずれの場合も ① に矛盾する．

ゆえに，x と y はともに 3 の倍数であるから，a，b を正の整数として

$$\begin{cases} x = 3a \\ y = 3b \end{cases}$$

と表せて，$(*)$ から

$$9z^2 = 3^6 a^6 + 3^4 b^4$$

両辺を 3^2 で割って $z^2 = 3^4 a^6 + 3^2 b^4 \quad \cdots\cdots (*)'$

$3^4 a^6 + 3^2 b^4 \equiv 0$ であるから $z^2 \equiv 0 \quad \cdots\cdots ②$

z が 3 の倍数ではないと仮定すると $z \equiv \pm 1$ であるから $z^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1$

これは ② に矛盾する．

ゆえに，z は 3 の倍数であるから，c を正の整数として

$$z = 3c$$

と表せて，$(*)'$ は

$$3^2 c^2 = 3^4 a^6 + 3^2 b^4$$

両辺を 3^2 で割って $c^2 = 9a^6 + b^4 \quad \cdots\cdots (*)''$

$a \geqq 1, b \geqq 1$ より $9a^6 + b^4 \geqq 10$ であるから，$c^2 \geqq 10$

c は正の整数なので $c \geqq 4$

$c = 4$ ならば $(*)''$ は $16 = 9a^6 + b^4$

$a = 1$ とすると $16 = 9 + b^4$ であるから $b^4 = 7$

これを満たす正の整数 b は存在しない．

$a \geqq 2$ とすると $9a^6 + b^4 > 16$ であるから満たさない．

$c = 5$ ならば $(*)''$ は $25 = 9a^6 + b^4$

$a = 1$ とすると $25 = 9 + b^4$ であるから $b^4 = 16 \quad \therefore b = 2$

ゆえに 最小の c は $c = 5$

すなわち，最小の z は $z = 3 \cdot 5 = 15$

このとき，$(*)$ は $N = 9 \cdot 15^2 = 3^6 + 6^4$

よって，N の最小値は **2025**

$\boxed{3}$ $f(x)=x^2\log x$，$g(x)=x^2\log x-\dfrac{1}{1+2\log x}$ $\left(x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

$f'(x)=2x\log x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x(2\log x+1)>0$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ $\left(t>\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ における接線に垂直で，点 $(t,\ g(t))$ を通る直線 l_t の方程式は

$$\begin{aligned} y&=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+g(t)\\ &=-\frac{1}{t(2\log t+1)}(x-t)+t^2\log t-\frac{1}{1+2\log t}\\ &=-\frac{1}{t(2\log t+1)}x+t^2\log t \end{aligned}$$

$y=0$ として　$x=t^3\log t(2\log t+1)$

l_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とするので

$$p(t)=t^3\{2(\log t)^2+\log t\}\quad\left(\frac{1}{\sqrt{e}}<t\leqq e\right)$$

$$\begin{aligned} p'(t)&=3t^2\{2(\log t)^2+\log t\}+t^3\left(4\log t\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\right)\\ &=t^2\{6(\log t)^2+7\log t+1\}\\ &=t^2(\log t+1)(6\log t+1) \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{e}}<t\leqq e$ において　$-\dfrac{1}{2}<\log t\leqq 1$ であることから　$t^2(\log t+1)>0$

$p'(t)=0$ とすると　$\log t=-\dfrac{1}{6}$　すなわち　$t=e^{-\frac{1}{6}}$

$p(t)$ の増減は次のようになる．

t	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{6}}$	$\cdots$	e
$p'(t)$		$-$	0	$+$	
$p(t)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{1}{9\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$3e^3$

よって，$p(t)$ の取りうる値の範囲は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{9\sqrt{e}}\leqq p(t)\leqq 3e^3}$

4 (1) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$ …① とすれば，Pはs, t, uの値に無関係な定点であり，$\overrightarrow{OL}=s\overrightarrow{OA}$ 等をふまえれば，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4s}\overrightarrow{OL}+\frac{1}{2t}\overrightarrow{OM}+\frac{3}{4u}\overrightarrow{ON}$$

となる．今，$\frac{1}{s}+\frac{2}{t}+\frac{3}{u}=4$，すなわち $\frac{1}{4s}+\frac{1}{2t}+\frac{3}{4u}=1$ なので上式で表される点Pは平面LMN上にある（平面LMNは点Pを通る）．

s, t, uの値に無関係に平面LMN上にある定点が，①で表されるP以外に存在する，すなわち $(x, y, z)\neq\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ …②を満たすある実数x, y, zを用いて $\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ …③と表される点Qがs, t, uの値に無関係に平面LMN上に存在すると仮定する．このとき③かつ $\overrightarrow{OL}=s\overrightarrow{OA}$ 等から $\overrightarrow{OQ}=\frac{x}{s}\overrightarrow{OL}+\frac{y}{t}\overrightarrow{OM}+\frac{z}{u}\overrightarrow{ON}$ が得られ，点Qが平面LMN上にあることから $\frac{x}{s}+\frac{y}{t}+\frac{z}{u}=1$ …④となる．

例えば $\frac{1}{s}+\frac{2}{t}+\frac{3}{u}=4$ を満たす実数s, t, uの組 $(s, t, u)=(1, 1, 3), \left(1, \frac{1}{2}, -3\right), (2, 4, 1)$ のとき④より

$$\begin{cases} x+y+\frac{z}{3}=1 \\ x+2y-\frac{z}{3}=1 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+z=1 \end{cases}$$

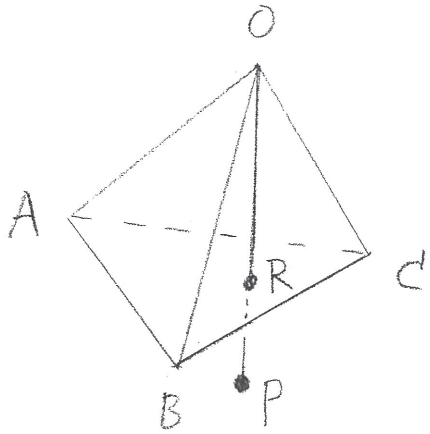
を得るが，これを解くと $(x, y, z)=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ となってしまい，これは②と矛盾する．

以上より，s, t, uの値に無関係に平面LMNが通る定点は，①で表されるP以外に存在しない．

(2)　OP と平面 ABC との交点を R とすると，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OP}$ (k は 0 でない実数) と表せる．① より

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}k\overrightarrow{OC}$$

となるが，R は平面 ABC 上にあるから $\frac{1}{4}k+\frac{1}{2}k+\frac{3}{4}k=1$，すなわち $k=\frac{2}{3}$ を得る．これより $\overrightarrow{OR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$ となり，平面 ABC を底面としたときの四面体 OABC と四面体 PABC の高さの比は 2 : 1 である．よって四面体 PABC の体積は $\frac{V}{2}$ である．



(補題)

上では

点 W が平面 XYZ 上に存在する

$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{OW}=l\overrightarrow{OX}+m\overrightarrow{OY}+n\overrightarrow{OZ}$ かつ $l+m+n=1$ を満たす実数 l, m, n が存在する

であることを既知として用いているが，これを以下に示しておく．

(証明)

点 W が平面 XYZ 上に存在する

$\iff$ $\overrightarrow{XW} = \alpha\overrightarrow{XY} + \beta\overrightarrow{XZ}$ を満たす実数 α, β が存在する

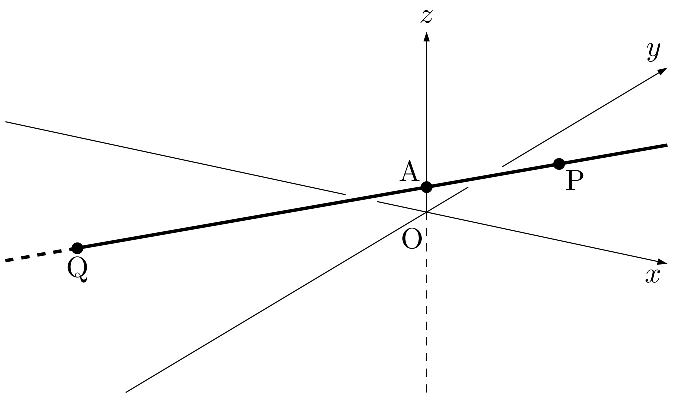
$\iff$ $\overrightarrow{OW} - \overrightarrow{OX} = \alpha(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}) + \beta(\overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OX})$ を満たす実数 α, β が存在する

$\iff$ $\overrightarrow{OW} = (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OX} + \alpha\overrightarrow{OY} + \beta\overrightarrow{OZ}$ を満たす実数 α, β が存在する

$\iff$ $\overrightarrow{OW} = l\overrightarrow{OX} + m\overrightarrow{OY} + n\overrightarrow{OZ}$ かつ $l+m+n=1$ を満たす実数 l, m, n が存在する

5

■ 解答例 □



2 点 $A\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$，$P\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$ を通る直線 AP 上の点 Q について，k を実数として，

$$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP}$$
$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right)$$
$$\overrightarrow{OQ} = (1-k)\,\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OP} = \left(k\cos\theta,\ k\sin\theta,\ \frac{\sqrt{2}\,(1-k) + 2k\cos\theta}{4}\right)$$

点 Q は xy 平面上の点であるので，z 成分に注目すると，

$$\frac{\sqrt{2}\,(1-k) + 2k\cos\theta}{4} = 0$$
$$\left(1 - \sqrt{2}\cos\theta\right) k = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

$-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos\theta \leqq 1$$
$$-\sqrt{2} \leqq -\sqrt{2}\cos\theta < -1$$
$$1 - \sqrt{2} \leqq 1 - \sqrt{2}\cos\theta < 0$$
$$\frac{1}{1 - \sqrt{2}\cos\theta} \leqq \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = -1 - \sqrt{2}$$

であるので，① より，

$$k = \frac{1}{1 - \sqrt{2}\cos\theta}\ \left(\leqq -1 - \sqrt{2}\right) \quad \cdots\cdots ②$$

$Q(X,\ Y,\ 0)$ とすると，$X = k\cos\theta$，$Y = k\sin\theta$

これを用いると，① より，

$$k = \sqrt{2}k\cos\theta + 1 = \sqrt{2}X + 1 \quad \cdots\cdots ③$$
$$k^2 = \left(\sqrt{2}X + 1\right)^2$$
$$k^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 2X^2 + 2\sqrt{2}X + 1 \quad \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \text{ を用いた}\right)$$
$$X^2 + Y^2 = 2X^2 + 2\sqrt{2}X + 1$$

$$X^2+2\sqrt{2}X-Y^2+1=0$$
$$\left(X+\sqrt{2}\right)^2-Y^2=1 \quad \cdots\cdots④$$

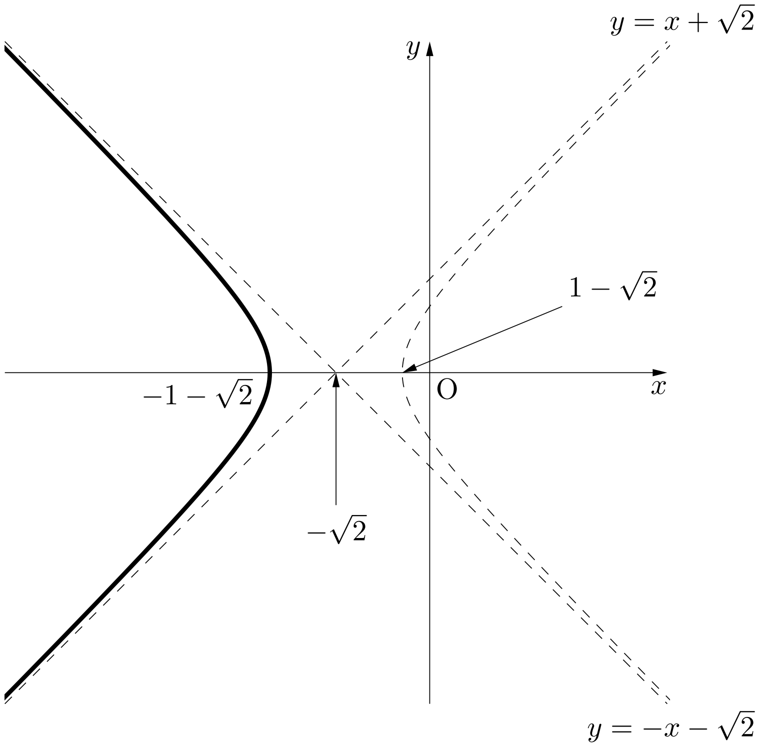
また，②，③ より，

$$\sqrt{2}X+1 \leqq -1-\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2}X \leqq -2-\sqrt{2}$$
$$X \leqq -1-\sqrt{2} \quad \cdots\cdots⑤$$

以上，④，⑤ より，点 Q の軌跡は，

双曲線 $\left(x+\sqrt{2}\right)^2-y^2=1$ の $x \leqq -1-\sqrt{2}$ の部分

であり，xy 平面上に図示すると下図の太線部分である．



6

2 以上の整数 n に対して,「$X_n = 1$ かつ Y_n が奇数になる確率」「$X_n = 0$ かつ Y_n が奇数になる確率」「$X_n = 1$ かつ Y_n が偶数になる確率」「$X_n = 0$ かつ Y_n が偶数になる確率」をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とすると,$p_n = a_n + b_n$ である.

次に, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ を定める漸化式を作る.

「$X_{n+1} = 1$ かつ Y_{n+1} が奇数になる」ための条件は,「$X_n = 0$ かつ Y_n が奇数であり,$X_{n+1} = 1$ である」または「$X_n = 1$ かつ Y_n が偶数であり,$X_{n+1} = 1$ である」であるから,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \quad \cdots[\mathbf{1}]$$

であり, これと同様に考えることによって,

$$\begin{cases} b_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n & \cdots[\mathbf{2}] \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}d_n & \cdots[\mathbf{3}] \\ d_{n+1} = \dfrac{1}{2}c_n + \dfrac{1}{2}d_n \end{cases}$$

が成り立つ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$.

[**1**]+[**3**] より,$a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{2}$ であり, これを用いて

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= a_{n+2} + b_{n+2} = b_{n+1} + \frac{1}{2}(a_{n+1} + c_{n+1}) \quad ([\mathbf{1}], [\mathbf{2}]\text{ より}) \\ &= b_{n+1} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \frac{1}{4} \quad ([\mathbf{2}]\text{ より}) \\ &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \end{aligned}$$

が成り立ち, この漸化式を変形すると

$$p_{n+2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \quad \cdots[\mathbf{4}]$$

が得られる.

以下,n の偶奇で分けて, 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求める.

<u>n が偶数の時</u>　まず,$p_2 = a_2 + b_2$ を求める. これは,「$(X_1, X_2) = (1, 1)$」となる確率であるから,

$$p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である.

n が (2 以上の) 偶数の時,$n = 2m$ となる正の整数 m が存在し, これと [**4**] の漸化式より

$$p_n - \frac{1}{2} = p_{2m} - \frac{1}{2} = \left(p_2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}$$

すなわち

$$p_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}$$

が成り立つ.

<u>n が奇数の時</u>　まず,$p_3 = a_3 + b_3$ を求める. これは,「$(X_1, X_2, X_3) = (0, 1, 1), (1, 1, 0)$」となる確率であるから,

$$p_3 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である.

n が (2 以上の) 奇数の時,$n = 2m + 1$ となる正の整数 m が存在し, これと [**4**] の漸化式より

$$p_n - \frac{1}{2} = p_{2m+1} - \frac{1}{2} = \left(p_3 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

すなわち

$$p_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

が成り立つ.

以上より, 求める確率 p_n は

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1} & (n \text{ が偶数の時}) \\ \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} & (n \text{ が奇数の時}) \end{cases} \cdots [答]$$