1

$f(x)=\frac{5}{2}x(1-x)$ について．

(1) $$f(x)-\frac{3}{5}=-\frac{5}{2}\left(x-\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{3}{5}\right) \quad \cdots★$$

とできるから，$f(x)=\frac{3}{5}$ となる x は，

$$x=\frac{2}{5},\ \frac{3}{5} \quad \cdots（答）$$

(2) $$\left|f(x)-\frac{3}{5}\right| \leqq \frac{5}{2}\left(\left|x-\frac{3}{5}\right|+\frac{1}{5}\right)\left|x-\frac{3}{5}\right| \quad \cdots◆$$

を示す．

★より，

$$\left|f(x)-\frac{3}{5}\right|=\frac{5}{2}\left|x-\frac{2}{5}\right|\left|x-\frac{3}{5}\right|$$

なので，$A=$（◆の左辺）$-$（◆の右辺）とおくと，

$$A=\frac{5}{2}\left|x-\frac{3}{5}\right|\left(\left|x-\frac{2}{5}\right|-\left|x-\frac{3}{5}\right|-\frac{1}{5}\right)$$

ここで，$g(x)=\left|x-\frac{2}{5}\right|-\left|x-\frac{3}{5}\right|-\frac{1}{5}$ とおくと，

$$g(x)=\begin{cases} -\frac{2}{5} & \left(x\leqq\frac{2}{5}\right) \\ 2x-\frac{6}{5} & \left(\frac{2}{5}\leqq x\leqq\frac{3}{5}\right) \\ 0 & \left(x\geqq\frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

となり，

$\frac{2}{5}\leqq x\leqq\frac{3}{5}$ のとき，$2x-\frac{6}{5}\leqq 2\cdot\frac{3}{5}-\frac{6}{5}=0$

なので，

$g(x)\leqq 0$

これと，$\frac{5}{2}\left|x-\frac{3}{5}\right|\geqq 0$ より，

$A\leqq 0$

といえ，◆は示される．

（証明終り）

なお，$g(x)\leqq 0$ は，三角不等式を利用して，

$$\left|x-\frac{2}{5}\right|=\left|\left(x-\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{5}\right|\leqq\left|x-\frac{3}{5}\right|+\frac{1}{5}$$

として示すこともできる．

(3) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$$\left|a_n-\frac{3}{5}\right|\leqq\frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \cdots Ⓐ$$

であることを数学的帰納法で示す．

（ア） $a_1=\alpha$ であり，$\left|\alpha-\frac{3}{5}\right|\leqq\frac{1}{16}=\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{4}$ なので，$n=1$ のとき，Ⓐは成り立つ．

（イ） $n=k$（k は自然数）のとき，Ⓐが成り立つとすると，

$$\left|a_k-\frac{3}{5}\right|\leqq\frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^k \quad \cdots ①$$

このとき，

$$\left|a_{k+1}-\frac{3}{5}\right|=\left|f(a_k)-\frac{3}{5}\right|$$

であり，これと(2)より，

$$\left|a_{k+1}-\frac{3}{5}\right|\leqq\frac{5}{2}\left(\left|a_k-\frac{3}{5}\right|+\frac{1}{5}\right)\left|a_k-\frac{3}{5}\right| \quad \cdots ②$$

がいえる．さらに，①と $k\geqq 1$ より，

$$\frac{5}{2}\left(\left|a_k-\frac{3}{5}\right|+\frac{1}{5}\right)\leqq\frac{5}{2}\left\{\frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^k+\frac{1}{5}\right\}\leqq\frac{5}{2}\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{21}{32}$$

これと，$\frac{21}{32}<\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$ より，

$$\frac{5}{2}\left(\left|a_k-\frac{3}{5}\right|+\frac{1}{5}\right)\leqq\frac{3}{4} \quad \cdots ③$$

したがって，①②③より，

$$\left|a_{k+1}-\frac{3}{5}\right|\leqq\frac{3}{4}\left|a_k-\frac{3}{5}\right|\leqq\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

となり，$n=k+1$ のとき，Ⓐは成り立つ．

以上，（ア）（イ）より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，Ⓐは成り立つ．

（証明終り）

2

(1) $f(\theta)=-\dfrac{\cos\theta}{2\sin\theta}+\cos\theta$ ($\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$)について,

$$f'(\theta)=-\frac{-\sin^2\theta-\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}-\sin\theta=\frac{1-2\sin^3\theta}{2\sin^2\theta}$$

そこで,

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

をみたす α を考えると,

$\dfrac{1}{2}<\sin\alpha<1$ なので, そのような α は区間 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ にただ一つ存在する. この α を用いると, 上表を得る. したがって,

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	↗		↘	0

$$\begin{cases}\text{最大値}:\theta=\alpha\text{ のとき}, & f(\alpha)\\ \text{最小値}:\theta=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\text{ のとき}, & 0\end{cases}$$

ここで, $\sin\alpha=2^{-\frac{1}{3}}$, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より,

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-2^{-\frac{2}{3}}}=2^{-\frac{1}{3}}\sqrt{2^{\frac{2}{3}}-1}$$

なので,

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=-\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}+\cos\alpha\\&=-\frac{2^{-\frac{1}{3}}\sqrt{2^{\frac{2}{3}}-1}}{2\cdot2^{-\frac{1}{3}}}+2^{-\frac{1}{3}}\sqrt{2^{\frac{2}{3}}-1}\\&=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2^{\frac{2}{3}}-1}+2^{\frac{2}{3}}\sqrt{2^{\frac{2}{3}}-1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(2^{\frac{2}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

以上より,

$$\text{最大値}:\frac{1}{2}\left(2^{\frac{2}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}},\quad \text{最小値}:0\quad\cdots(\text{答})$$

であり, 最小値を与える θ の値は,

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\quad\cdots(\text{答})$$

(2) 実数 a, b は,

$$a^2+b^2=1\text{ かつ }a\geqq\frac{1}{2}\text{ かつ }b\geqq0$$

を満たして動くので,

$$(a,\ b)=(\sin\theta,\ \cos\theta)\quad\left(\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)\quad\cdots★$$

とおける. このとき, P$(0,\ a)$, Q$(b,\ 0)$ に対して, 線分 PQ は,

$$ax+by=ab\text{ かつ }0\leqq y\leqq a$$

と表せる. いま, $a\geqq\dfrac{1}{2}$ なので, 線分 PQ と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ の共有点は必ず存在し, その x 座標は,

$$ax+\frac{b}{2}=ab$$

$$\therefore\ x=b-\frac{b}{2a}$$

を満たす. これと, ★より,

$$x=\cos\theta-\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\quad\left(\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

とかけるから, 求める範囲は, (1)より,

$$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\left(2^{\frac{2}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}}\quad\cdots(\text{答})$$

3

$x^6+mx^3+27=0$ （m は実数） $\cdots$★

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ $\cdots$◆

に対して，

$x=\tan\alpha$，$3\tan\beta$

が★の解となるときを考える．◆より，

$\tan\alpha>0$，　$3\tan\beta>0$ $\cdots$▼

(1) $x=\tan\alpha$，$3\tan\beta$ が★の解となる条件は，★が少なくとも1つの正の解をもつこと．ここで，★で $x=0$ とすると，

$27=0$

となり矛盾するので，$x\neq0$ といえ，

★ $\Leftrightarrow$ $-x^3-\dfrac{27}{x^3}=m$

そこで，$f(x)=-x^3-\dfrac{27}{x^3}$ とおくと，★が少なくとも 1 つの正の解をもつ条件は，

$C:y=f(x)$ と $l:y=m$ が $x>0$ に共有点をもつこと $\cdots$Ⓐ

いま，

$$f'(x)=-3x^2+\frac{81}{x^4}=\frac{3\left(3\sqrt{3}+x^3\right)\left(3\sqrt{3}-x^3\right)}{x^4}$$

なので，

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$6\sqrt{3}$	↗		↗	$-6\sqrt{3}$	↘

を得る．また，

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$，$\lim_{x\to-0}f(x)=\infty$

$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$

なので，Ⓐとなる条件は，

$m\leqq-6\sqrt{3}$

といえる．また，$m=-6\sqrt{3}$ のとき，

$f(x)=-6\sqrt{3}$

となる実数 x は，$x=\sqrt{3}$ だけなので，

$\tan\alpha=\sqrt{3}$，$3\tan\beta=\sqrt{3}$

$\therefore\ \tan\alpha=\sqrt{3}$，$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

よって，◆も考えて，

$(\alpha,\ \beta)=\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$

（解答終り）

(2) $\tan\alpha\neq3\tan\beta$ のとき，

$(\tan\alpha)^3\neq(3\tan\beta)^3$

であり，$x=\tan\alpha$，$3\tan\beta$ は★の解なので，

$\left\{(\tan\alpha)^3\right\}^2+m(\tan\alpha)^3+27=0$

$\left\{(3\tan\beta)^3\right\}^2+m(3\tan\beta)^3+27=0$

も成り立つ．したがって，

$t=(\tan\alpha)^3$，$(3\tan\beta)^3$ は，$t^2+mt+27=0$ の異なる 2 解

といえる．よって，解と係数の関係より，

$(\tan\alpha)^3\cdot(3\tan\beta)^3=27$

$\therefore\ \tan^3\alpha\cdot\tan^3\beta=1$

これと，▼より，

$\tan\alpha\tan\beta=1$

$\therefore\ \sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$

すなわち，

$\cos(\alpha+\beta)=0$

また，◆より，

$0<\alpha+\beta<\pi$

なので，

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ $\cdots$(答)

(3) $\tan\alpha\neq3\tan\beta$ のとき，

★は少なくとも異なる 2 つの正の実数解をもつ

したがって，(1)の議論より，

$m<-6\sqrt{3}$

であり，このとき，$C:y=f(x)$ と $l:y=m$ は異なる2つの共有点をもち，

★は正の実数解を 2 つだけもつ

これより，$x=\tan\alpha$，$3\tan\beta$ は，$C:y=f(x)$ と $l:y=m$ の異なる 2 つの共有点の x 座標と一致する．また，$m<-6\sqrt{3}$ のとき，$C:y=f(x)$ と $l:y=m$ の異なる 2 つの共有点の x 座標のうち小さい方は 0 に限りなく近づくことができるので，

$x=\tan\alpha$，$3\tan\beta$ のうち小さい方は，
限りなく 0 に近づくことができる

また，$\tan\alpha\tan\beta=1$ を満たすので，

$x=\tan\alpha$，$3\tan\beta$ のうち大きい方は，限りなく大きくなる

これと(1)(2)より，α，β は，

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ かつ $(\alpha,\ \beta)\neq\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ ◆かつ $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ かつ $\alpha\neq\dfrac{\pi}{3}$

を満たしてくまなく動く．このとき，

$$\begin{aligned}S&=2\sin\alpha\cos\beta\\&=2\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\&=2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

したがって，求める S の範囲は，

$0<S<\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{2}<S<2$ $\cdots$(答)

4

(1) $F(t)=\int t\sqrt{1-t^2}\,dt$ とおくと，

$$\left\{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}'=\frac{3}{2}\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2t)=-3t\sqrt{1-t^2}$$

であることより，

$$F(t)=-\frac{1}{3}\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}+C \quad (C\text{ は積分定数}) \quad \cdots(\text{答})$$

(2) 点 E は図1のようにとれる．ここで，灰色部分は S と平面 α の交わりであり，V は円柱のうち灰色部分の上側にない方となる．また，図1を真上，真横から眺めるとそれぞれ図2，図3となる．

このとき，平面 β は

図2では，直線 PQ

図3では，直線 IE

となり，平面 β による V の切り口 K は，

横の長さ：PQ

縦の長さ：IE

の長方形となる．

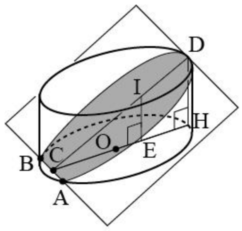


図1

いま，図2において，

$$\mathrm{CO}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{OE}=\left|s-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=|t|$$

なので△OEP に着目すると，

$$\mathrm{PE}=\sqrt{1-|t|^2}=\sqrt{1-t^2}$$

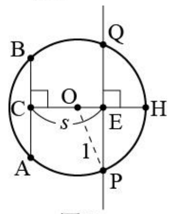


図2

また，図3において，

$$\mathrm{CO}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{OH}=\mathrm{DH}=1$$

であり，△DCH∽△ICE なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{IE}&=\mathrm{DH}\times\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CH}}\\&=1\times\frac{s}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\\&=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)s\\&=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}t+1\right)\end{aligned}$$

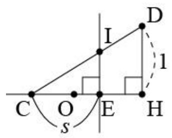


図3

したがって，K の面積 σ は，

$$\sigma=2\mathrm{PE}\cdot\mathrm{IE}=2\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}t+1\right)\sqrt{1-t^2} \quad \cdots(\text{答})$$

ただし，$0\leqq s\leqq 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より，

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq t\leqq 1$$

である．

(3) 求める体積 W は，

$$W=\int_0^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\sigma\,ds$$

いま，$s=t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ なので，

$$W=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sigma\,dt$$

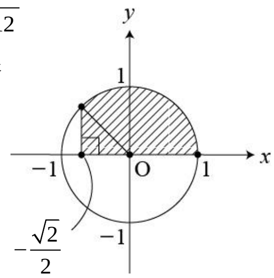
とかける．これと(2)より，

$$\begin{aligned}W&=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}2\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}t+1\right)\sqrt{1-t^2}\,dt\\&=\left(4-2\sqrt{2}\right)\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt+\left(2\sqrt{2}-2\right)\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt\end{aligned}$$

ここで，(1)より，

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt=\Big[F(t)\Big]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

また，$\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ は，右図の斜線部分の面積と等しく，



$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi\cdot1^2\cdot\frac{135^\circ}{360^\circ}\\&=\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned}W&=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}2\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}t+1\right)\sqrt{1-t^2}\,dt\\&=\left(4-2\sqrt{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}+\left(2\sqrt{2}-2\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{8}\right)\\&=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\frac{5}{6}+\frac{3\pi}{4}\right) \quad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$