$\boxed{1}$

(1)　$f(x)=x^3-6x^2-15x+30$ から

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-12x-15 \\ &= 3(x+1)(x-5) \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ の増減は次表の通り。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

したがって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x=-1}$ のとき極大，$\boldsymbol{x=5}$ のとき極小となり

極大値：$f(-1)=-1-6+15+30=\mathbf{38}$
極小値：$f(5)=125-150-75+30=\mathbf{-70}$

(2)　グラフ C 上の点 $(t,\ t^3-6t^2-15t+30)$ における接線の式は

$$y-(t^3-6t^2-15t+30)=(3t^2-12t-15)(x-t)$$
$$\therefore\ \ y=(3t^2-12t-15)x-2t^3+6t^2+30 \quad \cdots (*)$$

この接線が点 $(-3,\ -6)$ を通るとすると

$$\begin{aligned} &-6=(3t^2-12t-15)\cdot(-3)-2t^3+6t^2+30 \\ &\therefore\ \ 2t^3+3t^2-36t-81=0 \\ &\therefore\ \ (t+3)^2(2t-9)=0 \\ &\therefore\ \ t=-3,\ \frac{9}{2} \end{aligned}$$

これらを $(*)$ に代入して

$$\boldsymbol{y=48x+138,\ \ y=-\frac{33}{4}x-\frac{123}{4}}$$

2

(1)　条件

$$2 \leqq a < b < c \leqq 6 \quad \cdots\cdots (*)$$

を満たす整数 a, b に対する $a+b$ の値は次表の通り。

a ＼ b	3	4	5
2	5	6	7
3		7	8
4			9

したがって，$(*)$ と不等式 $a+b>c$ をともに満たす整数 a, b, c の組 $(a,\ b,\ c)$ は

$$\mathbf{(2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 4,\ 5),\ (2,\ 5,\ 6),\ (3,\ 4,\ 5),}$$
$$\mathbf{(3,\ 4,\ 6),\ (3,\ 5,\ 6),\ (4,\ 5,\ 6)}$$

(2)　条件 $(*)$ を満たす整数 a, b に対する a^2+b^2 の値は次表の通り。

a ＼ b	3	4	5
2	13	20	29
3		25	34
4			41

さらに

$$4^2=16,\ 5^2=25,\ 6^2=36$$

に注意すると，$(*)$ と不等式 $a^2+b^2 \geqq c^2$ をともに満たす整数 a, b, c の組 $(a,\ b,\ c)$ は

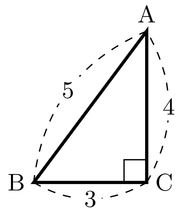
$$\mathbf{(3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 6)}$$

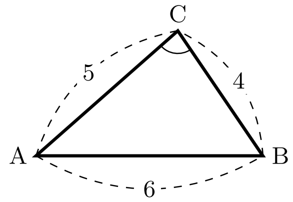
(3)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$ の場合，△ABC は辺 AB を斜辺とする直角三角形，つまり ∠ACB $=90^\circ$ なので

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=\cos 90^\circ=\mathbf{0}$$

$(a,\ b,\ c)=(4,\ 5,\ 6)$ の場合，余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\mathbf{\frac{1}{8}}$$





$\boxed{\mathbf{3}}$

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ において

$$(n+1)a_{n+2}-(2n+3)a_{n+1}+(n+2)a_n=0$$

は次のように変形できる。

$$(n+1)a_{n+2}-\{(n+1)+(n+2)\}a_{n+1}+(n+2)a_n=0$$

$$\therefore\quad (n+1)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}=(n+2)a_{n+1}-(n+2)a_n$$

$$\therefore\quad (n+1)(a_{n+2}-a_{n+1})=(n+2)(a_{n+1}-a_n)$$

したがって，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$$(n+1)b_{n+1}=(n+2)b_n \qquad \therefore\quad b_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}b_n$$

が成り立つ。 ■

(2)　(1) の結果を繰り返し適用することで

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{n+1}{n}b_{n-1}\\
&=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}b_{n-2}\\
&=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}b_{n-3}\\
&\quad\vdots\\
&=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}b_1\\
&=\frac{n+1}{2}b_1\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)
\end{aligned}$$

ここで，$b_1=a_2-a_1=2$ であるから

$$b_n=n+1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項が得られたから，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ において

$$\begin{aligned}
a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\\
&=1+2+3+\cdots+n\\
&=\frac{1}{2}n(n+1)
\end{aligned}$$

これは，$a_1=1$ にも適するので

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}n(n+1)}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

別 解

(1) の結果から

$$\frac{b_{n+1}}{n+2}=\frac{b_n}{n+1}$$

とできるので，数列 $\left\{\dfrac{b_n}{n+1}\right\}$ は定数列である。よって

$$\frac{b_n}{n+1}=\frac{b_1}{2}=1 \qquad \therefore\quad b_n=n+1$$

さらに，$b_n=a_{n+1}-a_n$ から

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n&=n+1\\
&=\frac{1}{2}\{(n+1)(n+2)-n(n+1)\}\\
&=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)
\end{aligned}$$

とできるので

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=a_n-\frac{1}{2}n(n+1)$$

したがって，数列 $\left\{a_n-\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}$ も定数列である。ゆえに

$$a_n-\frac{1}{2}n(n+1)=a_1-\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=0$$

$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

(3)　(2) の結果から

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{225}\frac{1}{a_n}&=\sum_{n=1}^{225}\frac{2}{n(n+1)}\\
&=2\sum_{n=1}^{225}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&=2\left(1-\frac{1}{226}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{225}{113}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$

実数 x，整数 n に対して

$$f(nx) = \{f(x)\}^n \quad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つ。

(1)　$(*)$ に $x = 1$ を代入して，$f(1) = 2$ に注意すると

$$f(n) = \{f(1)\}^n = 2^n$$

となる。数列 $\{2^n\}$ は増加する等比数列であり

$$2^5 = 32, \quad 2^6 = 64, \quad 2^7 = 128, \quad \cdots$$

なので，$f(n) \leqq 100$ となるような最大の整数 n は

$$\boldsymbol{n = 6}$$

(2)　任意の実数 x は $x = 2y$ とおけて，$(*)$ より

$$f(x) = f(2y) = \{f(y)\}^2$$

とできる。
題意より，$f(y)$ は 0 でない実数だから

$$\{f(y)\}^2 > 0$$

が成り立つ。したがって，すべての実数 x に対して

$$f(x) > 0$$

が成り立つ。 ■

(3)　$(*)$ に $x = 0.25$，$n = 4$ を代入して

$$f(4 \times 0.25) = \{f(0.25)\}^4$$
$$\therefore \quad \{f(0.25)\}^4 = f(1) = 2$$

ここで，(2) の結果により $f(0.25) > 0$ なので

$$f(0.25) = \boldsymbol{2^{\frac{1}{4}}}$$

(4)　a が有理数のとき，互いに素である整数 p，q を用いて

$$a = \frac{p}{q}$$

とおける。
$(*)$ に $x = a = \dfrac{p}{q}$，$n = q$ を代入して

$$f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = \{f(a)\}^q$$
$$\therefore \quad \{f(a)\}^q = f(p)$$

ここで，(1) より，整数 p に対して

$$f(p) = 2^p$$

であるから

$$\{f(a)\}^q = 2^p$$

さらに，$f(a) > 0$ なので

$$f(a) = 2^{\frac{p}{q}} = \boldsymbol{2^a}$$