1

$\alpha>1$，$r>1$に対して，$a_1=\alpha$，公比rの等比数列$\{a_n\}$の一般項は，

$$a_n=\alpha\cdot r^{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad\cdots Ⓐ$$

また，

$$b_n=\log_{a_n}(a_{n+1})\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad\cdots Ⓑ$$

(1) Ⓑの底を変換して，

$$b_n=\frac{\log_\alpha(a_{n+1})}{\log_\alpha(a_n)}$$

さらに，Ⓐを用いて，

$$b_n=\frac{\log_\alpha(\alpha\cdot r^n)}{\log_\alpha(\alpha\cdot r^{n-1})}$$

ここで，

$$\log_\alpha(\alpha\cdot r^n)=\log_\alpha\alpha+n\log_\alpha r=1+n\log_\alpha r$$

$$\log_\alpha(\alpha\cdot r^{n-1})=\log_\alpha\alpha+(n-1)\log_\alpha r=1+(n-1)\log_\alpha r$$

なので，

$$b_n=\frac{1+n\log_\alpha r}{1+(n-1)\log_\alpha r}\quad\cdots(答)$$

(2) (1)より，$b_n=\dfrac{n+2}{n+1}$となる条件は，

$$\frac{1+n\log_\alpha r}{1+(n-1)\log_\alpha r}=\frac{n+2}{n+1}\quad\cdots★$$

いま，★がすべての自然数 n で成り立つとき，$n=1$でも成り立つ．すなわち，

$$1+\log_\alpha r=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ \log_\alpha r=\frac{1}{2}\quad\cdots☆$$

が必要．このとき，

$$(★の左辺)=\frac{1+n\cdot\frac{1}{2}}{1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n+1}{2}}=\frac{n+2}{n+1}$$

となり，★はすべての自然数nで成り立つといえる．

以上より，求める必要十分条件は，☆となり，

$$r=\alpha^{\frac{1}{2}}\quad\cdots(答)$$

(3) (2)とⒶより，

$$a_n=\alpha\cdot\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^{n-1}=\alpha^{\frac{n+1}{2}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

したがって，

$$a_1a_2=\alpha^1\alpha^{\frac{3}{2}}=\alpha^{\frac{5}{2}}$$

$$a_1a_2a_3=\alpha^1\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha^2=\alpha^{\frac{9}{2}}$$

$$a_1a_2a_3a_4=\alpha^1\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha^2\alpha^{\frac{5}{2}}=\alpha^7$$

なので，それぞれの整数部分の桁数が2，3，4となる条件は，

$$\begin{cases}10\leqq\alpha^{\frac{5}{2}}<10^2 & \cdots①\\ 10^2\leqq\alpha^{\frac{9}{2}}<10^3 & \cdots②\\ 10^3\leqq\alpha^7<10^4 & \cdots③\end{cases}$$

をすべて満たすこと．いま，

$$①\iff 10^{\frac{2}{5}}\leqq\alpha<10^{\frac{4}{5}}$$

$$②\iff 10^{\frac{4}{9}}\leqq\alpha<10^{\frac{2}{3}}$$

$$③\iff 10^{\frac{3}{7}}\leqq\alpha<10^{\frac{4}{7}}$$

ここで，

$$\frac{2}{5}=\frac{12}{30}<\frac{3}{7}=\frac{12}{28}<\frac{4}{9}=\frac{12}{27}$$

$$\frac{4}{7}<\frac{2}{3}=\frac{4}{6}<\frac{4}{5}$$

なので，①②③をすべて満たすαの範囲は，

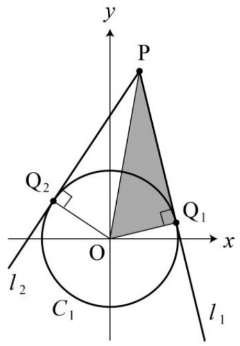
$$10^{\frac{4}{9}}\leqq\alpha<10^{\frac{4}{7}}\quad\cdots(答)$$

2

$C_1 : x^2+y^2=1$, $\mathrm{P}(p,\ q)$ について,

$$p^2+q^2>1$$

より, 点 P は, つねに円 C_1 の外部にある.
このとき, C_1, l_1, l_2 および P, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$ は右のようになる.



(1) △$\mathrm{OPQ_1}$ について,

$$\mathrm{OP}=\sqrt{p^2+q^2}$$

$$\mathrm{OQ_1}=1 \quad (\text{円 } C_1 \text{ の半径})$$

また, △$\mathrm{OPQ_1}$ は,

$$\angle \mathrm{OQ_1P}=\frac{\pi}{2}$$

の直角三角形なので,

$$\mathrm{Q_1P}=\sqrt{\mathrm{OP}^2-\mathrm{OQ_1}^2}=\sqrt{p^2+q^2-1}$$

よって, △$\mathrm{OPQ_1}$ の面積 T は,

$$T=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OQ_1}\cdot\mathrm{Q_1P}=\frac{\sqrt{p^2+q^2-1}}{2}$$

また, 同様に考えて, △$\mathrm{OPQ_2}$ の面積も T と一致する.
このとき, 四角形 $\mathrm{OQ_1PQ_2}$ の面積 S は,

$$S=2T=\sqrt{p^2+q^2-1} \quad \cdots(\text{答})$$

(2) $\mathrm{P}(p,\ q)$ が楕円 $C_2 : \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上を動くとき,

$$(p,\ q)=(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta) \quad (0\leqq\theta<2\pi)$$

とおける. このとき,

$$\begin{aligned} p^2+q^2 &= 2\cos^2\theta+3\sin^2\theta \\ &= 2(1-\sin^2\theta)+3\sin^2\theta \\ &= 2+\sin^2\theta \quad \cdots\bigstar \end{aligned}$$

となり,

$$p^2+q^2>1$$

を満たす. よって, (1)を用いて,

$$S=\sqrt{p^2+q^2-1}$$

とかけて, ★より,

$$S=\sqrt{1+\sin^2\theta}$$

となる. よって, 求める最大値, 最小値は,

$$\begin{cases} \text{最大値} : \sin\theta=\pm1 \text{ のとき}, & \sqrt{2} \\ \text{最小値} : \sin\theta=0 \text{ のとき}, & 1 \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

なお, $\mathrm{P}(p,\ q)$ が C_2 上を動くとき, $\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{q^2}{3}=1$ をみたすので,

$$p^2=2-\frac{2}{3}q^2$$

とできて,

$$p^2+q^2=2+\frac{1}{3}q^2>1$$

といえる. このとき, $p^2\geqq0$ より,

$$2-\frac{2}{3}q^2\geqq0$$

$$\therefore -\sqrt{3}\leqq q\leqq\sqrt{3}$$

であり,

$$S=\sqrt{p^2+q^2-1}=\sqrt{1+\frac{1}{3}q^2}$$

ここから, S の最大値, 最小値を考えることもできる.

3

実数 a に対して,

$$I(a,n)=\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin(nx)\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を考える.

(1) 部分積分を繰り返し用いて,

$$\begin{aligned}
&I(a,n)\\
&=\left[e^{ax}\left\{-\frac{1}{n}\cos(nx)\right\}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi} ae^{ax}\left\{-\frac{1}{n}\cos(nx)\right\}dx\\
&=\frac{1-e^{2a\pi}}{n}+\frac{a}{n}\int_0^{2\pi} e^{ax}\cos(nx)\,dx\\
&=\frac{1-e^{2a\pi}}{n}+\frac{a}{n}\left\{\left[e^{ax}\cdot\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi} ae^{ax}\cdot\frac{1}{n}\sin(nx)\,dx\right\}\\
&=\frac{1-e^{2a\pi}}{n}+\frac{a}{n}\left\{0-\frac{a}{n}\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin(nx)\,dx\right\}\\
&=\frac{1-e^{2a\pi}}{n}-\frac{a^2}{n^2}\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin(nx)\,dx\\
&=\frac{1-e^{2a\pi}}{n}-\frac{a^2}{n^2}I(a,n)
\end{aligned}$$

が成り立つ. これより,

$$I(a,n)=\frac{1-e^{2a\pi}}{n}-\frac{a^2}{n^2}I(a,n)$$

$$\therefore\ \frac{n^2+a^2}{n^2}I(a,n)=\frac{1-e^{2a\pi}}{n}$$

とできて,

$$I(a,n)=\frac{n\left(1-e^{2a\pi}\right)}{n^2+a^2} \quad \cdots(\text{答})$$

(2) (1)より,

$$I(a_n,n)=\frac{n\left(1-e^{2a_n\pi}\right)}{n^2+a_n{}^2}$$

いま, $a_n=\dfrac{\log n}{2\pi}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)なので,

$$e^{2a_n\pi}=e^{\log n}=n$$

したがって,

$$I(a_n,n)=\frac{n(1-n)}{n^2+\left(\dfrac{\log n}{2\pi}\right)^2}=\frac{\dfrac{1}{n}-1}{1+\dfrac{1}{4\pi^2}\left(\dfrac{\log n}{n}\right)^2}$$

とかけるので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ も利用して,

$$\lim_{n\to\infty}I(a_n,n)=\frac{0-1}{1+\dfrac{1}{4\pi^2}\cdot 0^2}=-1 \quad \cdots(\text{答})$$

4

$a>0$ …★

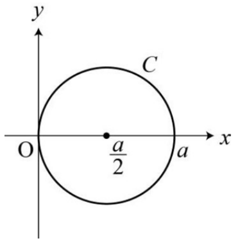
(1) ★，$a\neq 1$のとき，

$$a|z-1|=|(a-2)z+a|$$
$$\Leftrightarrow\ a^2|z-1|^2=|(a-2)z+a|^2$$
$$\Leftrightarrow\ a^2(z-1)(\overline{z}-1)=\{(a-2)z+a\}\{(a-2)\overline{z}+a\}$$
$$\Leftrightarrow\ a^2(z\overline{z}-z-\overline{z}+1)=(a-2)^2z\overline{z}+a(a-2)z+a(a-2)\overline{z}+a^2$$
$$\Leftrightarrow\ (4a-4)z\overline{z}-(2a^2-2a)z-(2a^2-2a)\overline{z}=0$$
$$\Leftrightarrow\ z\overline{z}-\frac{a}{2}z-\frac{a}{2}\overline{z}=0$$
$$\Leftrightarrow\ \left(z-\frac{a}{2}\right)\left(\overline{z}-\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow\ \left|z-\frac{a}{2}\right|^2=\frac{a^2}{4}$$

とできるから，★，$a\neq 1$のとき，
求めるz全体の集合は，右のような

中心$\frac{a}{2}$，半径$\frac{a}{2}$

の円Cとなる．



(2) $\begin{cases}|z|^2=6-a & \cdots① \\ a|z-1|=|(a-2)z+a| & \cdots②\end{cases}$

について，

（ア） $a=1$のとき，

①かつ②は，

$\begin{cases}|z|^2=5 & \cdots③ \\ |z-1|=|-z+1| & \cdots④\end{cases}$

となり，③は，

原点Oを中心とする半径$\sqrt{5}$の円

を表す．また，④は，任意の複素数zで成り立ち，

複素数平面上のすべての点

を表す．

したがって，③かつ④を満たす複素数zは存在する．

（イ） $a\neq 1$のとき，

②は，

(1)の円C

を表す．また，①を満たす複素数zは，

$a\leqq 6$

のとき存在し，

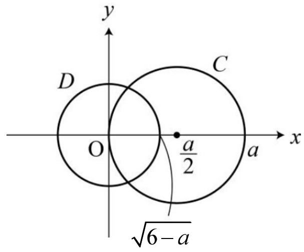
原点Oを中心とする半径$\sqrt{6-a}$の円D

あるいは

原点O

を表す．よって，①かつ②を満たす複素数zが存在する条件は，$a\leqq 6$のもとで，①②が表す図形が共有点をもつ条件を考えて，

$\sqrt{6-a}\leqq a$



いま，★も考えて，両辺とも0以上なので，2乗して，

$6-a\leqq a^2$

$\therefore (a+3)(a-2)\geqq 0$

となり，★，$a\leqq 6$も考えて，

$2\leqq a\leqq 6$

以上より，求めるaの範囲は，

$a=1$，$2\leqq a\leqq 6$ …(答)

（解答終り）

5

n は 3 以上の整数 …★

(1) 整数 k に対して,

$$k < a < b < c \leqq k+n$$

を満たす整数 a, b, c の選び方は,

$$k+1,\ k+2,\ \cdots\cdots,\ k+n$$

の異なる n 個の整数から, 3 個を選び, 小さい順に a, b, c とするような場合の数と等しく,

$${}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\ (\text{通り})\quad \cdots(\text{答})$$

(2) $1 \leqq a < b < c \leqq 2n$ …①

$a+b > c$ …②

として, ①かつ②を満たす整数 a, b, c の選び方 L を考える.

(ア) $a > n$ のとき,

$$n < a < b < c \leqq 2n$$

となる整数 a, b, c の選び方は, (1)より,

$${}_n\mathrm{C}_3\ (\text{通り})$$

あり, この ${}_n\mathrm{C}_3$ (通り) はいずれも①を満たす. さらに,

$$a > n,\quad b > n+1$$

なので,

$$a+b > 2n+1$$

また, $c \leqq 2n$ なので,

$$a+b > c$$

すなわち②を満たす.

(イ) $a \leqq n$ のとき,

$$(a,\ b,\ c) = (2,\ 3,\ 4)$$

は, ★より, ①を満たす. また, ②も満たす.

以上より, ①かつ②を満たす整数 a, b, c の選び方は, 少なくとも ${}_n\mathrm{C}_3+1$ (通り) あるといえ, $L > {}_n\mathrm{C}_3$ は示される.

(証明終り)