$\boxed{1}$

問(1)(a)　力のつり合いより，

$$kd = mg\sin\theta$$

$$\therefore\quad d = \frac{mg}{k}\sin\theta$$

(b)　手を放した後の単振動の最大速さは $2d\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ であり，小球が指示板から離れる点 B は(a)で考えたつり合いの位置から振幅の半分 d 離れた位置であるから，

$$v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2d\sqrt{\frac{k}{m}} = d\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

（別解）　点 B を基準として，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = -mg\cdot 3d\sin\theta + \frac{1}{2}k(3d)^2 = \frac{3}{2}kd^2$$

$$\therefore\quad v_0 = d\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

(c)　点 B を基準として，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 + mgR\cos\theta = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

$$\therefore\quad v_1 = \sqrt{{v_0}^2 - 2gR\cos\theta}$$

(d)　垂直抗力が 0 となる速さ v_{C} のとき，円の中心方向の運動方程式は，

$$m\frac{{v_{\mathrm{C}}}^2}{R} = mg\cos\theta - 0$$

$$\therefore\quad v_{\mathrm{C}} = \sqrt{gR\cos\theta}$$

(e)　小球が CE 間を運動する時間 $t_{\mathrm{CE}} = \dfrac{2R\sin\theta}{v_1\cos\theta}$ の間に，小球が C と同じ高さに戻ればよいので，

$$\begin{aligned}0 &= v_1\sin\theta\cdot t_{\mathrm{CE}} - \frac{1}{2}g{t_{\mathrm{CE}}}^2\\ &= t_{\mathrm{CE}}\left(v_1\sin\theta - \frac{g}{2}\cdot\frac{2R\sin\theta}{v_1\cos\theta}\right)\\ &= t_{\mathrm{CE}}\frac{\sin\theta}{v_1}\left({v_1}^2 - \frac{gR}{\cos\theta}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad ({v_1}^2 =)\ \frac{gR}{\cos\theta} = {v_0}^2 - 2gR\cos\theta \qquad (\because\quad \text{(c)})$$

$$\therefore\quad v_0 = \sqrt{gR\left(2\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

問(2)(a)　運動の対称性より，小球の速さは点 E で v_1，点 F で v_0 となる。点 F での弾性衝突について，

$$\begin{cases} \text{運動量保存則} & MV_2 + m(-v_2) = mv_0 \\ \text{反発係数の式} & V_2 - (-v_2) = -(0 - v_0) \end{cases}$$

$$\therefore\quad v_2 = \frac{M-m}{M+m}v_0\ ,\quad V_2 = \frac{2m}{M+m}v_0$$

(b)　摩擦熱を考慮して，エネルギー保存則より，

$$\mu' MgL\cos\theta = \frac{1}{2}M{V_2}^2 + MgL\sin\theta$$

$$\therefore\quad L = \frac{{V_2}^2}{2g(\mu'\cos\theta - \sin\theta)}$$

(c)　$v_2 = v_{\mathrm{a}}$ は点 D に達する速さの下限なので，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{a}}}^2 = mgR \qquad \therefore\quad v_{\mathrm{a}} = \sqrt{2gR}$$

小球の速さが速いときに，ED 間で最も台から離れやすいのは点 E である。$v_2 = v_{\mathrm{b}}$ のとき，問(1)(d)の v_{C} で $\theta = 45^\circ$ の場合を点 E での速さと考えて，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{b}}}^2 = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{gR\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 + mg\frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad v_{\mathrm{b}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)gR} = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}gR}$$

(d)　記号：(お)

理由：問(1)(e)より，$v_0 = \sqrt{\dfrac{4}{\sqrt{2}}gR}$ である。ここで，$x = \dfrac{M}{m}$ とおくと，点 F での運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}m{v_2}^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}v_0\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}}gR}\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^2\sqrt{2}mgR$$

のように表され，$x > 1$ で単調増加である。

$v_2 \leqq v_{\mathrm{a}}$ である $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるようなある値（$x \fallingdotseq 12$）までは，最高点の高さが K に比例して増加する。$v_{\mathrm{a}} \leqq v_2 \leqq v_{\mathrm{b}}$ である $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 \leqq \dfrac{3}{4}$ となるある値（$x \fallingdotseq 14$）までは，最高点の高さは R である。それよりも大きな x（すなわち $x \geqq 14$）となると $v_2 > v_{\mathrm{b}}$ であり，点 E で離れるので，台上の最高点の高さは $\dfrac{\sqrt{2}}{2}R \fallingdotseq 0.7R$ となる。

$\boxed{2}$

問(1)(a)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_1 = mgh$$

$$\therefore \quad v_1 = \sqrt{2gh}$$

誘導起電力は(イ)の向きに大きさ v_1Bw であるから，オームの法則より，電流も (イ) の向きに

$$I_1 = \frac{v_1Bw}{R}$$
$$= \frac{Bw}{R}\sqrt{2gh}$$

(b)　最も速い $y = h$ において電磁力の大きさが重力の大きさより大きければ減速するといえるので，

$$I_1Bw > mg$$

$$\frac{(Bw)^2}{R}\sqrt{2gh} > mg$$

$$\therefore \quad h > \frac{g(mR)^2}{2(Bw)^4}$$

を満たせばよい。

(c)　エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 = mg(h+\ell) - Q$$

$$\therefore \quad v_2 = \sqrt{2g(h+\ell) - \frac{2Q}{m}}$$

(d)　$t > t_2$ では重力のみによる加速となるので，等加速度運動の式より，

$$v_1 = v_2 + g\Delta t$$

$$\therefore \quad \Delta t = \frac{v_1 - v_2}{g}$$
$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{v_2}{g}$$

(e)　記号：(あ)

理由：誘導起電力および電流が生じるのは，コイルを貫く磁束が時間変化する $t_1 < t < t_2$ の時間のみである。t_1 から t_2 にかけてコイルが指数関数的に減速するとともに，誘導起電力および電流の大きさは減少するため。

問(2)(a)　コンデンサーの電圧は誘導起電力の大きさ vBw に等しいので，コンデンサーの基本式より，

$$q = \underset{\sim\sim\sim\sim}{CvBw}$$

(b)　コンデンサーの充電電流は，

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta CvBw}{\Delta t} = CBw\frac{\Delta v}{\Delta t} = CBwa$$

のように加速度 $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ に比例することがわかる。コイルの運動方程式は，

$$Ma = Mg - IBw$$

$$= Mg - C(Bw)^2 a$$

$$\therefore \quad \{M + C(Bw)^2\}a = Mg$$

$$\therefore \quad a = \frac{M}{M + C(Bw)^2}g$$

(c)　$y = h + \dfrac{\ell}{2}$ における速さを v' として，等加速度運動の式より，

$$v'^2 - 0^2 = 2a \cdot \frac{\ell}{2}$$

$$\therefore \quad v' = \sqrt{a\ell}$$

$$\therefore \quad U = \frac{1}{2}C(v'Bw)^2 = \frac{1}{2}Ca\ell(Bw)^2 = \frac{C(Bw)^2}{M + C(Bw)^2}\frac{Mg\ell}{2}$$

$\boxed{3}$

問(1)(a)　理想気体の状態方程式より，

$$p_{\mathrm{A}} S(L+x) = RT_{\mathrm{A}} \qquad \therefore \quad p_{\mathrm{A}} = \frac{RT_{\mathrm{A}}}{S(L+x)}$$

(b)　ピストンにはたらく力のつり合いの式は，

$$p_{\mathrm{A}} S = p_{\mathrm{B}} S + kx$$

(c)　$x = \dfrac{L}{2}$ における空間 A・B の圧力をそれぞれ p_{A1}，p_{B1} として，

$$\begin{cases} \text{力のつり合い} & p_{\mathrm{A1}} S = p_{\mathrm{B1}} S + k\dfrac{L}{2} \\ \text{空間 B の状態方程式} & p_{\mathrm{B1}} S\dfrac{L}{2} = RT_{\mathrm{B1}} \end{cases} \qquad \left(\text{(a)より，} \ p_{\mathrm{A1}} = \frac{2RT_{\mathrm{A}}}{3SL} \right)$$

p_{A1} と p_{B1} を消去して，

$$\left(\frac{2RT_{\mathrm{A}}}{3L} - \frac{kL}{2} \right) \frac{L}{2} = RT_{\mathrm{B1}}$$

$$\therefore \quad T_{\mathrm{B1}} = \left(\frac{2RT_{\mathrm{A}}}{3L} - \frac{kL}{2} \right) \frac{L}{2R} = \frac{T_{\mathrm{A}}}{3} - \frac{kL^2}{4R}$$

問(2)(a)　定積変化なので，定積モル比熱 $\dfrac{3}{2}R$ を用いて，

$$Q = \frac{3}{2} R (T_{\mathrm{B2}} - T_{\mathrm{B1}})$$

$$\therefore \quad T_{\mathrm{B2}} = T_{\mathrm{B1}} + \frac{2Q}{3R} = \frac{T_{\mathrm{A}}}{3} - \frac{kL^2}{4R} + \frac{2Q}{3R}$$

(b)　ボイル・シャルルの法則より，

$$\frac{p_{\mathrm{B1}} + \Delta p}{T_{\mathrm{B2}}} = \frac{p_{\mathrm{B1}}}{T_{\mathrm{B1}}}$$

$$\cancel{1} + \frac{\Delta p}{p_{\mathrm{B1}}} = \cancel{1} + \frac{2Q}{3RT_{\mathrm{B1}}} \qquad \left(= \frac{T_{\mathrm{B2}}}{T_{\mathrm{B1}}} \right)$$

$$\therefore \quad \Delta p = \frac{2Q}{3} \cdot \frac{p_{\mathrm{B1}}}{RT_{\mathrm{B1}}} = \frac{2Q}{3} \cdot \frac{2}{SL} = \frac{4Q}{3SL}$$

(c)　内部エネルギーは絶対温度に比例し，空間 A の温度は T_{A} に保たれているので，

$$\Delta U_{\mathrm{A}} = 0$$

(d)　状態 2 → 3 は断熱変化なので，ポアソンの式を用いて，

$$p_{\mathrm{B3}} (SL)^{\gamma} = p_{\mathrm{B2}} \left(S\frac{L}{2} \right)^{\gamma}$$

$$\therefore \quad p_{\mathrm{B3}} = 2^{-\gamma} p_{\mathrm{B2}}$$

(e) $x=0$ における力のつり合いより，p_{B3} が $x=0$ における p_{A} に一致すればよいので，

$$2^{-\gamma}\left(p_{\mathrm{B1}}+\mathit{\Delta}p\right)=\frac{RT_{\mathrm{A}}}{SL}$$

$$\frac{2RT_{\mathrm{A}}}{3SL}-\frac{kL}{2S}+\frac{4Q}{3SL}=2^{\gamma}\cdot\frac{RT_{\mathrm{A}}}{SL}$$

$$\frac{4}{3}Q=\left(2^{\gamma}-\frac{2}{3}\right)RT_{\mathrm{A}}+\frac{1}{2}kL^2$$

$$\therefore\quad Q=\left(3\cdot 2^{\gamma-2}-\frac{1}{2}\right)RT_{\mathrm{A}}+\frac{3}{8}kL^2$$

(f) 位置 x における空間 B の圧力を p_{B} とすると，ポアソンの式で $x=0$ のときと比べて，

$$p_{\mathrm{B}}\{S(L-x)\}^{\gamma}=\frac{RT_{\mathrm{A}}}{SL}(SL)^{\gamma}$$

$$\therefore\quad p_{\mathrm{B}}=\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\gamma}\frac{RT_{\mathrm{A}}}{SL}$$

位置 x でのピストンにはたらく力のつり合いより，

$$k(x-d)=(p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})S$$

$$\therefore\quad d=x-\frac{p_{\mathrm{A}}S-p_{\mathrm{B}}S}{k}$$

$$=x-\frac{1}{k}\left\{\frac{RT_{\mathrm{A}}}{L+x}-\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\gamma}\frac{RT_{\mathrm{A}}}{L}\right\}$$

$$=x-\frac{RT_{\mathrm{A}}}{kL}\left\{\frac{L}{L+x}-\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\gamma}\right\}$$