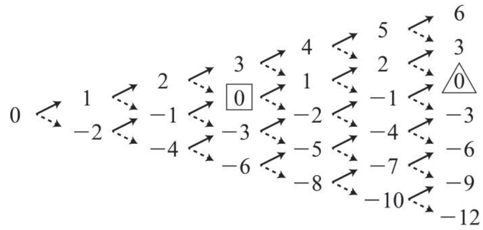
$\boxed{1}$

1 回の試行(∗)によって,

点 P が「正の向きに 1 だけ進む」確率は, $\dfrac{3}{4}$

点 P が「負の向きに 2 だけ進む」確率は, $\dfrac{1}{4}$

試行(∗)を 6 回繰り返したとき, 点 P の数直線上の座標は次のように推移する.



ここで,

↗ は, 点 P が「正の向きに 1 だけ進む」こと

↘ は, 点 P が「負の向きに 2 だけ進む」こと

を表す.

(1) 求める確率は, 最初の 0 から 3 回目の 0($\boxed{0}$)まで進む, すなわち, 3 回中 2 回だけ点 P が「正の向きに 1 だけ進む」確率である. よって,

$${}_3C_2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{64}\quad\cdots(\text{答})$$

(2) 求める確率は, 最初の 0 から 6 回目の 0(△0)まで進む, すなわち, 6 回中 4 回だけ点 P が「正の向きに 1 だけ進む」確率である. よって,

$${}_6C_4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1215}{4096}\quad\cdots(\text{答})$$

(3) 試行(∗)を n 回繰り返したとき, k 回だけ「正の向きに 1 だけ進む」とすると, 点 P が原点に戻っている条件は,

$$k-2(n-k)=0$$
$$\therefore 3k=2n\quad\cdots★$$

となること. いま, k, n は整数で, 3 と 2 は互いの素なので,

★ ⇒ n は 3 の倍数

がいえる.

よって, その対偶を考えて, n が 3 で割り切れないとき,

★は成り立たない

といえるから, 求める確率は,

0 …(答)

2

$x_n>0$，$y_n>0$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）

$x_{n+1}=(x_n)^5\cdot(y_n)^2$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$） …㋐

$y_{n+1}=x_n\cdot(y_n)^6$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$） …㋑

$x_1=2$，$y_1=\dfrac{1}{2}$

(1) $x_n>0$，$y_n>0$ より，㋐㋑は，

$$\log_2 x_{n+1}=5\log_2 x_n+2\log_2 y_n$$
$$\log_2 y_{n+1}=\log_2 x_n+6\log_2 y_n$$

とかけるから，$a_n=\log_2 x_n$，$b_n=\log_2 y_n$ とおくと，

$$a_{n+1}=5a_n+2b_n \quad \cdots①$$
$$b_{n+1}=a_n+6b_n \quad \cdots②$$

とかける．いま，

$$a_1=\log_2 x_1=\log_2 2=1$$
$$b_1=\log_2 y_1=\log_2\frac{1}{2}=-1$$

なので，①②より，

$$a_2=5a_1+2b_1=3$$
$$b_2=a_1+6b_1=-5$$
$$a_3=5a_2+2b_2=5$$
$$b_3=a_2+6b_2=-27$$

よって，

$$a_1+kb_1=1-k$$
$$a_2+kb_2=3-5k$$
$$a_3+kb_3=5-27k$$

なので，数列 $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列になるとき，

$$1-k,\ 3-5k,\ 5-27k$$

は，この順に等比数列となる．よって，

$$(3-5k)^2=(1-k)(5-27k)$$
$$\therefore\ 2k^2-2k-4=0$$

これより，

$$k=-1,\ 2$$

が必要である．また，①＋②×k より，

$$a_{n+1}+kb_{n+1}=(5+k)a_n+(2+6k)b_n$$

なので，$k=-1$ のとき，

$$a_{n+1}-b_{n+1}=4(a_n-b_n)$$

となり，

数列 $\{a_n-b_n\}$ は公比 4 の等比数列 …Ⓐ

また，$k=2$ のとき，

$$a_{n+1}+2b_{n+1}=7(a_n+2b_n)$$

となり，

数列 $\{a_n+2b_n\}$ は公比 7 の等比数列 …Ⓑ

とかける．以上より，求める k は，

$k=-1,\ 2$ …（答）

ですべてである．

(2) Ⓐより，

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\times 4^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n-b_n=2^{2n-1} \quad \cdots★$$

Ⓑより，

$$a_n+2b_n=(a_1+2b_1)\times 7^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n+2b_n=-7^{n-1} \quad \cdots☆$$

よって，★×2＋☆より，

$$3a_n=2^{2n}-7^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=\frac{2^{2n}-7^{n-1}}{3}$$

これと，$a_n=\log_2 x_n$ より，

$x_n=2^{\frac{2^{2n}-7^{n-1}}{3}}$ …（答）

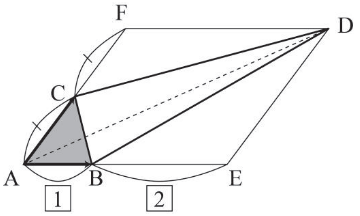
3

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として,

$$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\quad\cdots★$$

を考える.

(1) ★より, 点 D は平面 ABC 上にあるから, 平面 ABC に底面をとったとき, 四面体 OABC と四角錐 OABDC の高さは一致する. そこで, 平面 ABC 上の点の位置に注目すると,



となる. ここで, 点 E, F はそれぞれ,

$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AC}$$

を満たし, □AEDF は平行四辺形である. このとき, 面積について, AE // FD, AF // ED に着目して,

$$\triangle ABD=\triangle ABF=\triangle ABC\times 2$$
$$\triangle ACD=\triangle ACE=\triangle ABC\times 3$$

といえる. よって,

$$\square ABDC=\triangle ABD+\triangle ACD=\triangle ABC\times 5$$

以上より, 四角錐 OABCD の体積を四面体 OABC の体積 V で表すと,

$$5V\quad\cdots(答)$$

(2) ★より,

$$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=3\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+2\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)$$

とかけるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}&=-4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\\&=-4\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}\quad\cdots(答)\end{aligned}$$

(3) 線分 AD と線分 BC の交点 P について.

点 P は線分 AD 上にあるので,

$$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD}\quad(0\leqq k\leqq 1)$$
$$\therefore\ \overrightarrow{OP}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OD}$$

これと(2)より,

$$\overrightarrow{OP}=(1-5k)\vec{a}+3k\vec{b}+2k\vec{c}\quad\cdots①$$

また, 点 P は線分 BC 上にあるので,

$$\overrightarrow{BP}=l\overrightarrow{BC}\quad(0\leqq l\leqq 1)$$
$$\therefore\ \overrightarrow{OP}=(1-l)\vec{b}+l\vec{c}\quad\cdots②$$

いま, 四面体 OABC を考えているので, ①②より,

$$1-5k=0 \text{ かつ } 3k=1-l \text{ かつ } 2k=l$$
$$\therefore\ (k,\ l)=\left(\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\right)$$

となり, $0\leqq k\leqq 1$, $0\leqq l\leqq 1$ を満たす. よって, ②より,

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}\quad\cdots(答)$$

(4) 四面体 OABC が 1 辺の長さ 1 の正四面体のとき,

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$$

このとき,

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{OD}\right|^2&=\left|-4\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}\right|^2\\&=16|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2-24\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{c}-16\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=15\end{aligned}$$

となるから,

$$\left|\overrightarrow{OD}\right|=\sqrt{15}\quad\cdots(答)$$

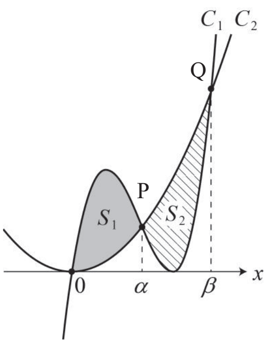
4

$$f(x)=x(x-2)^2$$
$$g(x)=kx^2 \quad (k>0)$$

とおく. このとき,

$$C_1: y=f(x)$$
$$C_2: y=g(x)$$

は右図のように原点 O および $x>0$ に存在する異なる2点P, Q で交わる. ここで, P, Q の座標をそれぞれ α, β $(0<\alpha<\beta)$ とし, C_1 と C_2 で囲まれた 2 つの部分のうち, 灰色部分の面積を S_1, 斜線部分の面積を S_2 とすると,



$$S_1=\int_0^\alpha \{f(x)-g(x)\}dx, \quad S_2=\int_\alpha^\beta \{g(x)-f(x)\}dx$$

なので,

$$\begin{aligned} S_1-S_2 &= \int_0^\alpha \{f(x)-g(x)\}dx-\int_\alpha^\beta \{g(x)-f(x)\}dx \\ &= \int_0^\alpha \{f(x)-g(x)\}dx+\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}dx \\ &= \int_0^\beta \{f(x)-g(x)\}dx \end{aligned}$$

よって, $S_1=S_2$ となる条件は,

$$S_1-S_2=0$$
$$\therefore \int_0^\beta \{f(x)-g(x)\}dx=0 \quad \cdots★$$

ところで,

$f(x)-g(x)=0$ の 3 解は, $x=0$, α, β

$f(x)-g(x)$ は 3 次式で, 3 次の係数が 1

であることから,

$$f(x)-g(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$$

とかける. よって,

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \{f(x)-g(x)\}dx &= \int_0^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= \int_0^\beta \{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3+\frac{1}{2}\alpha\beta x^2\right]_0^\beta \\ &= \frac{1}{12}\beta^3(2\alpha-\beta) \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

なので,

$$★ \iff \beta^3(2\alpha-\beta)=0$$

よって, $\beta>0$ も考えて,

$$\beta=2\alpha \quad \cdots①$$

一方,

$$\begin{aligned} & f(x)=g(x) \\ \iff & x(x-2)^2=kx^2 \\ \iff & x\{x^2-(k+4)x+4\}=0 \end{aligned}$$

なので, α, β は

$$x^2-(k+4)x+4=0$$

の 2 つの実数解であり,

$$\alpha+\beta=k+4 \quad \cdots②$$
$$\alpha\beta=4 \quad \cdots③$$

を満たす.

以上, ①②③および $0<\alpha<\beta$ より,

$$(\alpha, \beta)=(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$
$$k=3\sqrt{2}-4 \quad \cdots(答)$$