1

試行 $(*)$ を 1 回行うとき，点 P を正の向きに 1 だけ進める事象を R，負の向きに 2 だけ進める事象を L とする。

事象 R が起こるのは，「硬貨の表が出た場合」または「硬貨の裏が出て，かつ，さいころの奇数の目が出た場合」だから，この確率 r は

$$r=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{4}$$

事象 L が起こるのは，「硬貨の裏が出て，かつ，さいころの偶数の目が出た場合」だから，この確率 l は

$$l=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(1)　試行 $(*)$ を 3 回繰り返したとき，点 P が原点にもどっているのは，R が 2 回，L が 1 回起こるときなので，この確率は

$${}_3\mathrm{C}_2r^2l=3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{27}{64}}$$

(2)　試行 $(*)$ を 6 回繰り返したとき，点 P が原点にもどっているのは，R が 4 回，L が 2 回起こるときなので，この確率は

$${}_6\mathrm{C}_4r^4l^2=15\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1215}{4096}}$$

(3)　試行 $(*)$ を n 回繰り返したとき，R が m 回，L が $n-m$ 回起こったとすると，点 P の位置は

$$(+1)\cdot m+(-2)\cdot(n-m)=-2n+3m$$

と表せる。これが 0 に等しいとすると

$$-2n+3m=0 \qquad \therefore\ 2n=3m \quad \cdots\cdots ①$$

n が 3 で割り切れない正の整数のとき，① の左辺は 3 の倍数でなく，右辺は 3 の倍数なので，適する整数 m が存在しない。よって，点 P が原点にもどっている確率は $\mathbf{0}$ である。

$\boxed{2}$

正の実数からなる数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ について

$$\begin{cases} x_1 = 2, \quad y_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2 & \cdots\cdots ① \\ y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ。

(1)　$a_n = \log_2 x_n$，$b_n = \log_2 y_n$ とおくとき，① ② から

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \log_2 x_{n+1} \\ &= \log_2((x_n)^5 \cdot (y_n)^2) \\ &= 5\log_2 x_n + 2\log_2 y_n \\ &= 5a_n + 2b_n \\ b_{n+1} &= \log_2 y_{n+1} \\ &= \log_2(x_n \cdot (y_n)^6) \\ &= \log_2 x_n + 6\log_2 y_n \\ &= a_n + 6b_n \end{aligned}$$

とできる。したがって，実数 k に対して

$$\begin{aligned} a_{n+1} + kb_{n+1} &= (5a_n + 2b_n) + k(a_n + 6b_n) \\ &= (5+k)a_n + (2+6k)b_n \quad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

とできる。
数列 $\{a_n + kb_n\}$ が公比 r の等比数列になるための条件は

$$\begin{aligned} a_{n+1} + kb_{n+1} &= r(a_n + kb_n) \\ &= ra_n + rkb_n \quad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

が成り立つことだから，③ ④ を比べて

$$5 + k = r \ \text{かつ} \ 2 + 6k = rk$$

r を消去すれば

$$\begin{aligned} &2 + 6k = (5+k)k \\ \therefore\ &k^2 - k - 2 = 0 \\ \therefore\ &k = -1,\ 2 \end{aligned}$$

ゆえに

$$(k,\ r) = (-1,\ 4),\ (2,\ 7)$$

である。よって，求める k の値は

$$\boldsymbol{k = -1,\ 2}$$

(2)　(1) から，数列 $\{a_n - b_n\}$ は公比 4 の等比数列であり，数列 $\{a_n + 2b_n\}$ は公比 7 の等比数列であるから

$$\begin{cases} a_n - b_n = (a_1 - b_1) \cdot 4^{n-1} \\ a_n + 2b_n = (a_1 + 2b_1) \cdot 7^{n-1} \end{cases}$$

ここで，$x_1 = 2$，$y_1 = \dfrac{1}{2}$ より

$$a_1 = \log_2 2 = 1, \quad b_1 = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

であるから

$$\begin{cases} a_n - b_n = 2 \cdot 4^{n-1} \\ a_n + 2b_n = -7^{n-1} \end{cases}$$

したがって

$$a_n = \frac{2(a_n - b_n) + (a_n + 2b_n)}{3} = \frac{4^n - 7^{n-1}}{3}$$

であるから

$$x_n = 2^{a_n} = \boldsymbol{2^{\frac{4^n - 7^{n-1}}{3}}}$$

$\boxed{3}$

(1)　$f(x) = x^4 + \dfrac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$ から

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 4ax^2 + 2(a+2)x \\ &= 2x\{2x^2 + 2ax + (a+2)\} \end{aligned}$$

ここで，$g(x) = 2x^2 + 2ax + (a+2)$ とすると

$$g(x) = 2\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} + a + 2$$

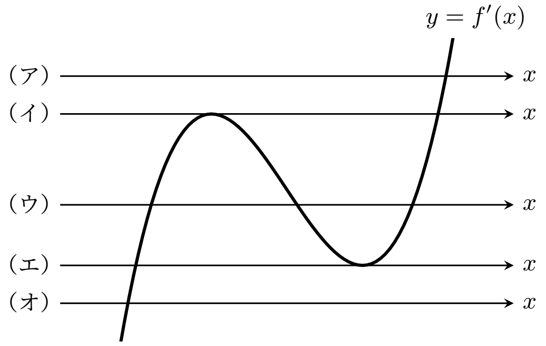
である。

関数 $f(x)$ が極大値をもつのは

$f'(x)$ の符号が正から負へ変化する　$\cdots\cdots$ $(*)$

ような x が存在するときである。

3 次関数 $f'(x)$ の x^3 の係数が正であることに注意して，$f'(x)$ がつねに増加するときには $(*)$ を満たす x が存在しないので，$f'(x)$ が極値をもつことが必要である。このときの $y = f'(x)$ のグラフと x 軸の位置関係は次図の 5 パターンが考えられる。



この中で，$(*)$ を満たす x が存在するのは（ウ）のときだけである。したがって，$f(x)$ が極大値をもつことは「$y = f'(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わること」すなわち「方程式 $g(x) = 0$ が異なる 2 つの 0 でない実数解をもつこと」と同値である。ゆえに，a が満たすべき条件は

$$g(0) \neq 0 \ \text{かつ}\ -\frac{a^2}{2} + a + 2 < 0$$

$$\therefore\ a + 2 \neq 0 \ \text{かつ}\ a^2 - 2a - 4 > 0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a < -2,\ -2 < a < 1 - \sqrt{5},\ 1 + \sqrt{5} < a}$$

(2)　関数 $f(x)$ が $x = 0$ で極大値をもつのは，(1) の（ウ）における 3 つの交点のうち小さい方から 2 番目の交点の x 座標が 0 となるときである。すなわち，方程式 $g(x) = 0$ が正と負の解をもつときだから，その為の条件は

$$g(0) < 0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a < -2}$$

4

(1)　$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の x 座標を $t\ (>0)$ とおくとき，t が満たすべき条件は

$$\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases} \iff \begin{cases} n\log t = at^n \\ \dfrac{n}{t} = nat^{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} n\log t = at^n & \cdots\cdots ① \\ 1 = at^n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

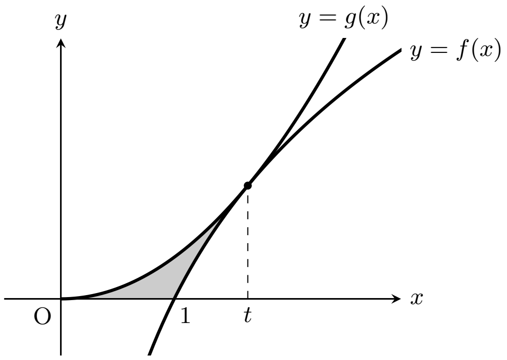
したがって

$$n\log t = 1 \qquad \therefore\ t = e^{\frac{1}{n}}$$

これを ② に代入すれば

$$1 = ae \qquad \therefore\ \boldsymbol{a = \frac{1}{e}}$$

(2)　題意の面積 S_n は次図の灰色部分の面積である。



したがって

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^t ax^n\,dx - \int_1^t n\log x\,dx \\ &= \left[\frac{a}{n+1}x^{n+1}\right]_0^t - \Big[n(x\log x - x)\Big]_1^t \\ &= \frac{at^{n+1}}{n+1} - n(t\log t - t + 1) \\ &= \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1} - n\left(e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n} - e^{\frac{1}{n}} + 1\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{n^2}{n+1}e^{\frac{1}{n}} - n} \end{aligned}$$

(3)　$h = \dfrac{1}{n}$ とおくと

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\frac{1}{h^2}}{\frac{1}{h}+1}e^h - \frac{1}{h} \\ &= \frac{1}{1+h}\left(\frac{e^h-1}{h} + \frac{1}{h}\right) - \frac{1}{h} \\ &= \frac{1}{1+h}\cdot\frac{e^h-1}{h} - \frac{1}{1+h} \\ &= \frac{1}{1+h}\left(\frac{e^h-1}{h} - 1\right) \end{aligned}$$

$n\to\infty$ のとき $h\to 0$ であり

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{1+h}\left(\frac{e^h-1}{h} - 1\right) \\ &= \frac{1}{1+0}(1-1) \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boxed{5}$

(1)　点 Q は直線 NP 上にあるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}+s\overrightarrow{\mathrm{NP}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}a\\b\\c-1\end{pmatrix}$$

と表せる。さらに，点 Q は xy 平面上にあるから

$$1+s(c-1)=0$$

ここで，$c-1=0$ とすると $1=0$ となり不成立だから $c\neq 1$ であり

$$s=\frac{1}{1-c}\qquad \therefore\ \boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\frac{a}{1-c},\ \frac{b}{1-c},\ 0\right)}$$

(2)　点 $(p,\ q,\ 0)$ を R，求める点を T として，点 T は直線 NR 上にあるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}+t\overrightarrow{\mathrm{NR}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}p\\q\\-1\end{pmatrix}$$

と表せる。さらに，点 T は球面 S 上にあるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OT}}|=1 &\iff (pt)^2+(qt)^2+(1-t)^2=1\\ &\iff (p^2+q^2+1)t^2-2t=0\end{aligned}$$

T と N が異なることより $t\neq 0$ なので

$$t=\frac{2}{p^2+q^2+1}$$

したがって

$$\boldsymbol{\mathrm{T}\left(\frac{2p}{p^2+q^2+1},\ \frac{2q}{p^2+q^2+1},\ \frac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}\right)}$$

(3)　点 $\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ を U とし，(2) の T を P，R を Q と読み替えれば，Q$(p,\ q,\ 0)$ であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{UP}}&=\frac{1}{p^2+q^2+1}\begin{pmatrix}2p\\2q\\p^2+q^2-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2(p^2+q^2+1)}\begin{pmatrix}4p\\4q\\p^2+q^2-3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。点 P が平面 α 上を動くとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{UP}}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=0 &\iff \begin{pmatrix}4p\\4q\\p^2+q^2-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=0\\ &\iff 12p+16q+5p^2+5q^2-15=0\\ &\iff \left(p+\frac{6}{5}\right)^2+\left(q+\frac{8}{5}\right)^2=7\end{aligned}$$

ゆえに，点 Q は xy 平面上の，中心 $\left(-\frac{6}{5},\ -\frac{8}{5}\right)$，半径 $\sqrt{7}$ の円周上を動く。 ■

別 解　((2) を利用しない方法)

点 P$(a,\ b,\ c)$ が平面 α と球面 S の交わりを動くとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1\ \text{かつ}\ \begin{pmatrix}a\\b\\c-1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore\ \begin{cases}a^2+b^2+c^2=1 & \cdots\cdots ①\\ 6a+8b+10c-5=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

が成り立つ。

点 Q を $(X,\ Y,\ 0)$ とおくと，(1) の結果から

$$X=\frac{a}{1-c}\ \text{かつ}\ Y=\frac{b}{1-c}$$
$$\therefore\ a=(1-c)X\ \text{かつ}\ b=(1-c)Y\quad\cdots\cdots ③$$

これを ② に代入して

$$\begin{aligned}&6(1-c)X+8(1-c)Y+10c-5=0\\ \therefore\ &2(3X+4Y-5)c=6X+8Y-5\end{aligned}$$

ここで，$3X+4Y-5=0$ とすると

$$0\cdot c=5$$

となり不成立だから $3X+4Y-5\neq 0$ であり

$$c=\frac{6X+8Y-5}{2(3X+4Y-5)}$$
$$\therefore\ 1-c=\frac{-5}{2(3X+4Y-5)}$$

とできる。

また，③ を ① に代入して

$$\begin{aligned}&(1-c)^2X^2+(1-c)^2Y^2+c^2=1\\ \therefore\ &(1-c)X^2+(1-c)Y^2=1+c\quad (\because c\neq 1)\end{aligned}$$

以上から，X，Y が満たすべき条件は

$$\frac{-5X^2}{2(3X+4Y-5)}+\frac{-5Y^2}{2(3X+4Y-5)}=1+\frac{6X+8Y-5}{2(3X+4Y-5)}$$

$$\iff \begin{cases}3X+4Y-5\neq 0\\ -5X^2-5Y^2=12X+16Y-15\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}3X+4Y-5\neq 0\\ X^2+Y^2+\frac{12}{5}X+\frac{16}{5}Y=3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}3X+4Y-5\neq 0\\ \left(X+\frac{6}{5}\right)^2+\left(Y+\frac{8}{5}\right)^2=7\end{cases}$$

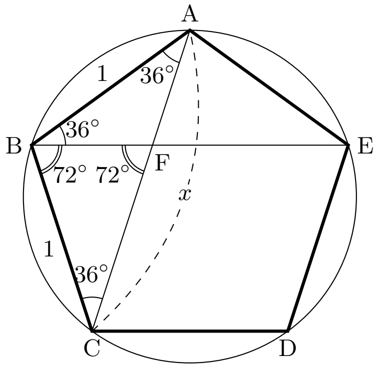
ゆえに，点 Q は xy 平面上の，中心 $\left(-\frac{6}{5},\ -\frac{8}{5}\right)$，半径 $\sqrt{7}$ の円周上を動く。 ■

$\boxed{6}$

(1)　正五角形 K の各頂点を下図のように A，B，C，D，E とし，辺 AC と辺 BE の交点を F とする。K の外接円を考えて，K の一辺に対する円周角の大きさが

$$\frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

であることから，下図のようになる。また，対角線の長さを x とおく。



このとき

$$\mathrm{AF} = \mathrm{CA} - \mathrm{CF} = \mathrm{CA} - \mathrm{CB} = x - 1$$

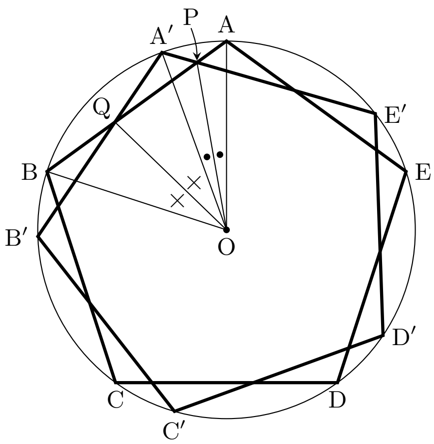
であり，$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{AFB}$ から

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AF} = \mathrm{AC} : \mathrm{AB}$$
$$\therefore\ \ 1 : (x-1) = x : 1$$
$$\therefore\ \ x^2 - x - 1 = 0$$

$x > 0$ に注意して

$$x = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2)　図形 P_θ の各頂点を下図のように，A′，B′，C′，D′，E′ とし，外接円の中心を O とする。また，辺 AB と 2 辺 E′A′，A′B′ の交点をそれぞれ P，Q とする。



このとき，$\angle\mathrm{POA}' = \angle\mathrm{POA}$，$\angle\mathrm{QOA}' = \angle\mathrm{QOB}$ であり，$\angle\mathrm{AOB} = 72^\circ$ だから

$$\angle\mathrm{POQ} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB} = 36^\circ$$

また，図形の対称性より，P と P_θ の共通部分は 10 個の辺からなり，この 10 辺はすべて長さが等しい。よって，周の長さ ℓ_θ は

$$\ell_\theta = 10\mathrm{PQ}$$

で得られる。ただし，θ $(=\angle\mathrm{AOA}')$ の範囲は

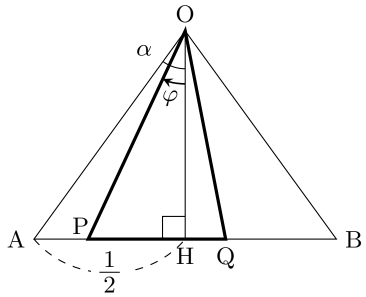
$$0^\circ < \theta \leqq 36^\circ$$

で考えれば十分である。

点 O から辺 AB に下ろした垂線の足を H とし，$\varphi = \angle\mathrm{POH}$ とおく。ただし，φ は弧度法であり，とり得る値の範囲は

$$0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{5}$$

である。以下，$\alpha = \dfrac{\pi}{5}$ とおく。



このとき

$$\angle\mathrm{QOH} = \angle\mathrm{POQ} - \varphi = \alpha - \varphi$$

であることに注意して

$$\mathrm{PH} = \mathrm{OH}\tan\varphi,\quad \mathrm{QH} = \mathrm{OH}\tan(\alpha-\varphi)$$
$$\therefore\ \ \mathrm{PQ} = \mathrm{PH} + \mathrm{QH} = \mathrm{OH}\{\tan\varphi + \tan(\alpha-\varphi)\}$$
$$\therefore\ \ \ell_\theta = 10\mathrm{OH}\{\tan\varphi + \tan(\alpha-\varphi)\}$$

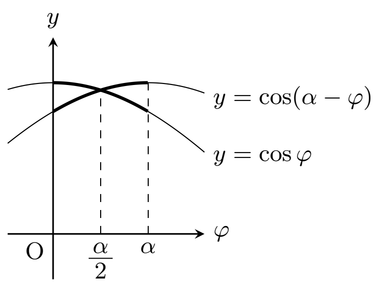
ここで，$f(\varphi) = \tan\varphi + \tan(\alpha-\varphi)$ とすると

$$f'(\varphi) = \frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{\cos^2(\alpha-\varphi)} = \frac{\{\cos(\alpha-\varphi)+\cos\varphi\}\{\cos(\alpha-\varphi)-\cos\varphi\}}{\cos^2\varphi\cos^2(\alpha-\varphi)}$$

となり，$0 \leqq \varphi < \dfrac{\pi}{5}$，$0 < \alpha - \varphi \leqq \dfrac{\pi}{5}$ より

$$\frac{\cos(\alpha-\varphi)+\cos\varphi}{\cos^2\varphi\cos^2(\alpha-\varphi)} > 0$$

なので，$f'(\varphi)$ の符号は $\cos(\alpha-\varphi) - \cos\varphi$ の符号に一致する。



$y=\cos(\alpha-\varphi)$ と $y=\cos\varphi$ のグラフが上図のようになることに注意して，$f(\varphi)$ の増減は次表の通り。

φ	0	$\cdots$	$\frac{\alpha}{2}$	$\cdots$	(α)
$f'(\varphi)$		$-$	0	$+$	
$f(\varphi)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ゆえに，ℓ_θ の最小値は

$$\begin{aligned}10\mathrm{OH}f\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 10\cdot\frac{1}{2\tan\alpha}\cdot 2\tan\frac{\alpha}{2}\\ &= 10\cdot\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}\\ &= 5\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\\ &= 5\left(1-\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)\\ &= \frac{10\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\end{aligned}$$

である。(1) の $\triangle\mathrm{ABC}$ に注目して

$$\cos\alpha=\frac{x}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

であるから

$$\begin{aligned}10\mathrm{OH}f\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{10\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{4}}\\ &= \frac{10(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}\\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

■