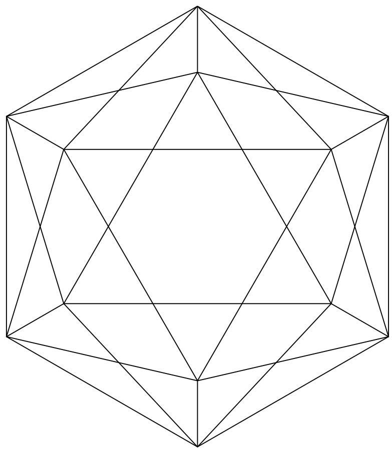
2025 東京科学大学：医歯薬系 数学（歯・保健衛生） 解答例

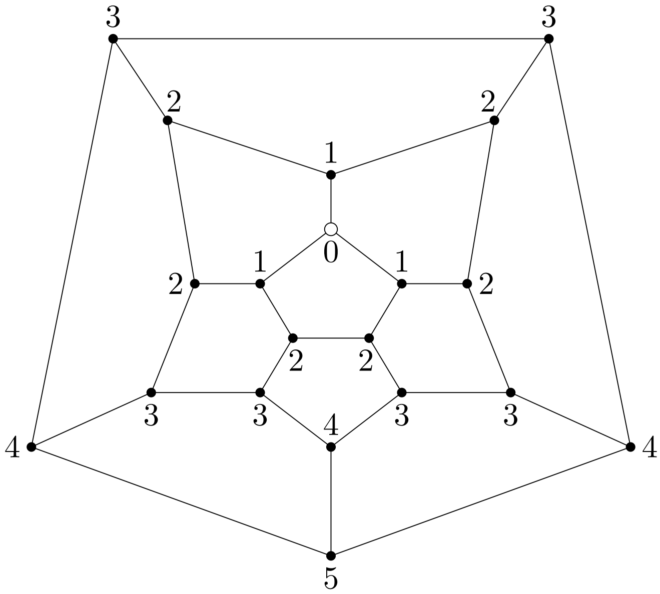
1

(1)



(2) (1) で描いた I' の図はサイコロ I の頂点間の関係を与えたものであるが，(2) 以降では面の間の関係が必要である。そのため，正二十面体の隣同士の面の重心を曲線で結んでできる立体について，頂点間の関係を表した図形を新たに描き直すことにする。（なお，正二十面体と正十二面体の関係性より，新たな図形は正十二面体の頂点間の関係を与えたものである。）

このとき，曲線の長さを適宜変えることで，新たに作成する図形は次のような平面の図形で表すことができる。ただし，白丸として表される点は F_1 として固定して考える面に対応しており，黒丸で表されている点はそれ以外の正二十面体の各面を表している。また，線分で直接結ばれている 2 つの黒丸は 2 つの面がある辺を共有していることを表している。また，各黒丸のそばにある数字は，その黒丸に対応する面 F_i と白丸でに対応する面 F_1 との間の $d(F_1, F_i)$ の値である。



以上より

$$P_0 = \frac{1}{20},\ P_1 = \frac{3}{20},\ P_2 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10},$$
$$P_3 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10},\ P_4 = \frac{3}{20},\ P_5 = \frac{1}{20}$$

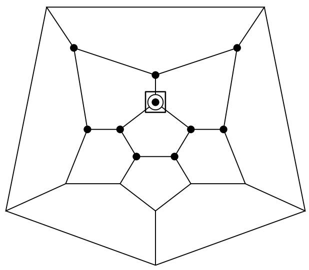
である。

なお，以下では $d(F_1, F_i) = k$ である点に対応する面 F_i のことを「k の面」と呼ぶことにする。このとき，空間図形の対称性より同じ k の面の場合，どの面を取っても同等であるから，図を描く際はそのうちの 1 つの場合のみを描くことにする。

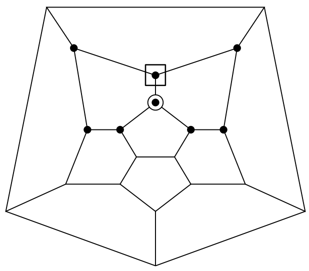
(3)　余事象である，$M \leqq 2$ となる確率を計算する。

F_1 として，(2) の図の白丸の点に対応する面を取った場合を考える。このとき，F_2 が 0 の面，1 の面，2 の面のどれに対応するかで場合分けして考える。なお，以下の図では F_2 の面に対応する点を □ で囲んでいる。

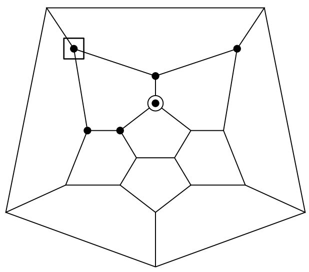
(i)　F_2 が 0 の面のとき，F_3 は右の図の黒丸（10 個）に対応する面であればよい。



(ii)　F_2 が 1 の面のとき，F_3 は次の図の黒丸（8 個）に対応する面であればよい。



(iii)　F_2 が 2 の面のとき，F_3 は次の図の黒丸（6 個）に対応する面であればよい。



以上より，$M \leqq 2$ となる確率は

$$\frac{1}{20} \times \frac{10}{20} + \frac{3}{20} \times \frac{8}{20} + \frac{6}{20} \times \frac{6}{20} = \frac{7}{40}$$

であるので，求める確率は

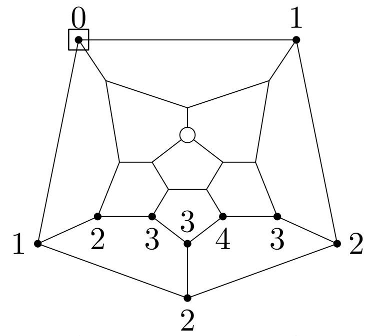
$$1 - \frac{7}{40} = \frac{33}{40}$$

である。

(4)　まず $n=3$ の場合を考える。(3) と同様に，F_2 がどの点に対応する面であるかで場合分けして考える。なお，以下の図では F_2 の面に対応する点を □ で囲んでいる。

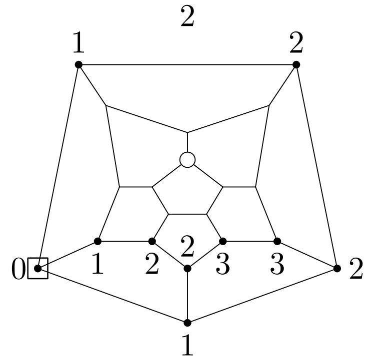
(a)　F_2 が 3 の面のとき，F_1 との距離が 3 以上の点に対し F_2 との距離を求め，図に書き入れると右のようになる。

よって，F_3 として考えられる面の数は 4 つである。



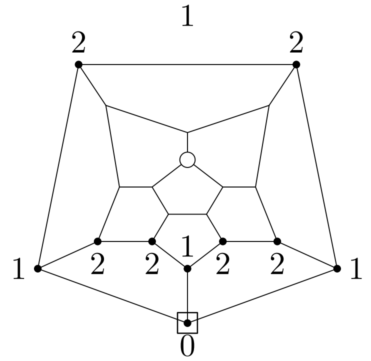
(b)　F_2 が 4 の面のとき，F_1 との距離が 3 以上の点に対し F_2 との距離を求め，図に書き入れると右のようになる。

よって，F_3 として考えられる面の数は 2 つである。



(c)　F_2 が 5 の面のとき，F_1 との距離が 3 以上の点に対し F_2 との距離を求め，図に書き入れると右のようになる。

よって，F_3 として考えられる面は存在しない。



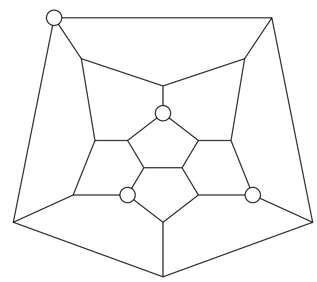
以上より，$n=3$ のときの求める確率は

$$\frac{6}{20}\times\frac{4}{20}+\frac{3}{20}\times\frac{2}{10}=\frac{3}{40}$$

である。

また，$n=4$ のときを考えると，$n=3$ のときの (b) の状況に F_4 を追加して条件を満たすことはできない。

一方，(a) の状況に F_4 を追加する場合，右の図の白丸のような取り方を考えることができる。



以上より，$n=4$ のときの求める確率は

$$\frac{6}{20}\times\frac{2}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2000}$$

さらに，$n\geqq 5$ のときは (a) の状況ですら F_5 をとることはできないので，このときの

求める確率は

$$\underset{\sim}{0}$$

である。

(5)　まず，同一の面が 2 回以上出たとすると $m = 0$ となり，不適である。

次に，(2) の図より，正二十面体の任意の面 A に対し

$$d(A, B) = 5$$

を満たすような面 B がただ一つ存在する。このとき，これら A，B の面がともに 1 回出たとすると $M = 5$ となり，不適である。

以上を踏まえ，正二十面体の 20 個の面を，次の条件を満たすグループ 10 個に分類することにする。

- すべての面は，10 個のグループのうち 1 つに属する。
- 各グループは 2 つの面からなる。
- 各グループの 2 つの異なる面 A，B は条件 $d(A, B) = 5$ を満たす。

このとき，サイコロ I を n 回振ったときに出た面のうち，ある 2 つの面 F_i，F_j が同一のグループに属するならば，$d(F_i, F_j) = 0$（F_i と F_j が同一の面のとき），または $d(F_i, F_j) = 5$（F_i と F_j が異なる面のとき）となるので，条件を満たさない。

ゆえに，条件 $1 \leqq m \leqq M \leqq 4$ を満たすためには，n 個の面 F_1，F_2，$\cdots$，F_n すべてが異なるグループの属していなければならないことが示された。

グループの数は 10 であることより，$n \geqq 11$ のときこのような選び方は不可能であるから，このときの求める確率は

$$\underset{\sim}{0}$$

である。

一方，$n = 10$ のとき，各グループに属する面がすべて 1 つであれば条件を満たすことができる。よってこのときの求める確率は

$$\frac{18}{20} \times \frac{16}{20} \times \frac{14}{20} \times \frac{12}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{8}{20} \times \frac{6}{20} \times \frac{4}{20} \times \frac{2}{20}$$
$$= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{9!}{10^9}}$$

である。

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1)　点 P の座標を (x, y) とおくと，条件

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

および A$(2,4)$，B$(3,7)$ より

$$\begin{cases} x = 2m + 3n & \cdots ① \\ y = 4m + 7n & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ。このとき，m，n は整数より x，y も整数である。

　次に，①，②を用いて m，n を x，y で表し，x と y が満たす条件を求める。まず②$-2\times$① より

$$n = -2x + y \quad \cdots ③$$

となり，この式③の右辺 $-2x+y$ は x，y が整数のとき常に整数である。

　また，③を①に代入して整理すると

$$2m = x - 3(-2x+y) = 7x - 3y = 2(3x-y) + (x-y)$$
$$m = 3x - y + \frac{1}{2}(x-y) \quad \cdots ④$$

である。これより，m，n が整数となるための整数 x，y の必要十分条件は

x，y はともに奇数であるか，ともに偶数である　$\cdots$ $(*)$

となる。

　以上より

$\mathrm{P}_1 \in L$　$(m = 2,\ n = -1)$

$\mathrm{P}_2 \notin L$

$\mathrm{P}_3 \in L$　$(m = 9,\ n = -5)$

である。(ただし，m，n の値は③，④に x，y の値をそれぞれ代入して計算している。)

(2)　(1) の考察より x 軸上の点 P が L に属するための必要十分条件は，点 P の x 座標が偶数，であることがわかる。

　よって，求める点の座標は

$(2k, 0)$　(k は整数)

と表される。

(3)　L に属する点を，原点 O に近い方から順に考えることにする。

まず，原点 O からの距離が 0 である O 自身が L の要素であるが，これらの点を A' や B' とすると $\overrightarrow{0}$ が現れ，原点 O を含む 1 つの直線上にある L の要素しか表すことができなくなるため条件を満たさない。

次に，O 以外の L の要素で，原点 O に最も近いものを考えると，O からの距離が $\sqrt{2}$ である 4 点

$$(1,1),\ (-1,1),\ (1,-1),\ (-1,-1)$$

がこれに当てはまる。そこで，これらの中から 2 点をとって条件を満たすことができるかどうかを考える。

$\mathrm{A}'(1,1)$，$\mathrm{B}'(-1,1)$ とする。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}'} + \overrightarrow{\mathrm{OB}'}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 5\overrightarrow{\mathrm{OA}'} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$$

と表されるので，集合 L の定め方より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= m\left(3\overrightarrow{\mathrm{OA}'} + \overrightarrow{\mathrm{OB}'}\right) + n\left(5\overrightarrow{\mathrm{OA}'} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}'}\right)\\ &= (3m+5n)\overrightarrow{\mathrm{OA}'} + (m+2n)\overrightarrow{\mathrm{OB}'}\end{aligned}$$

となり，$m' = 3m+5n$，$n' = m+2n$ とすれば条件を満たすことができる。

以上より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}'}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}'}\right|$ の最小値は

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

である。

(4)　以下，複数の $\pm$ がある場合はすべて複号任意で取り扱うものとする。

次の条件を満たす，xy 平面上の点 Q 全体の集合 M について考える。

条件：任意の L の要素 P に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が整数になる。

点 Q の座標を (X, Y) とする。

まず，(2) より点 $\mathrm{I}(2,0)$ は L の要素であり，この点 I について

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2X$$

が成り立つ。$-1 \leqq X \leqq 1$ の範囲でこれが整数になるとき

$$X = 0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 1 \quad \cdots⑤$$

のいずれかである。

また，(1) より点 P_1 $(1,1)$ は L の要素であり，この点 P_1 について

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=X+Y$$

が成り立つ。よって，⑤の X の値の下でこれが整数になる，$-1\leqq Y\leqq 1$ をみたす Y の値は

- $X=0$，±1 のとき，$Y=0$，±1
- $X=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき，$Y=\pm\dfrac{1}{2}$

である。

以下，これらの点 Q について，一般の L の要素 P の場合でも $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が整数になることを確認する。

$\mathrm{P}(x,y)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=xX+yY$$

x，y は整数であるので，X と Y がともに整数の場合，すなわち

$$(X,Y)=(0,0),\ (0,\pm1),\ (\pm1,0),\ (\pm1,\ \pm1)$$

の場合，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は整数である。

一方，$(X,Y)=\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$ の場合

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\pm\frac{1}{2}(x\pm y)$$

となる。

ここで P は L の要素より，(1) の結果 $(*)$ を用いることができ

$$x\pm y \text{ は偶数}$$

が成り立つ。

よってこの場合も $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は整数である。

以上より，求める M の要素は

$$(0,0),\ (0,\pm1),\ (\pm1,0),\ (\pm1,\ \pm1),\ \left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)\quad(\text{複号任意})$$

である。

3

(1)　$f(x) = a^x$ とする。このとき，指数・対数の性質より $f(x) = e^{x\log a}$ と表すこともできることに注意する。

$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = e^{x\log a}\log a$$

であるので，接点の x 座標が t である C_1 の接線の方程式は

$$y = e^{t\log a}(\log a)x - te^{t\log a}\log a + e^{t\log a}$$

である。

これが原点を通るとき

$$\begin{aligned} &-te^{t\log a}\log a + e^{t\log a} = 0 \\ &t = \frac{1}{\log a} \end{aligned}$$

であるので，k と a が満たす関係式は

$$\begin{aligned} k &= e^{t\log a}\log a \\ &= e\log a \\ a &= e^{\frac{k}{e}} \end{aligned}$$

である。

また，$t = \dfrac{1}{\log a}$ のとき

$$f(t) = e^{t\log a} = e$$

であるので，接点の座標は

$$\left(\frac{1}{\log a}, e\right)$$

である。

(2)　C_1 と C_2 は直線 $y = x$ について対称であり，原点 O はこの直線 $y = x$ の上にある。

よって，C_2 の接線で原点 O を通るものの接点は，(1) で求めた C_1 の接線の接点 $\left(\dfrac{1}{\log a}, e\right)$ と直線 $y = x$ について対称な位置にある。その座標は

$$\left(e, \frac{1}{\log a}\right)$$

である。

$\boxed{\text{(1)，(2) の別解}}$

(1)，(2) は，C_2 の接線を考える (2) の設問から問題を解く方法も考えられる。特にこの方法では，少々思いつきにくい式変形

$$a^{\frac{1}{\log a}} = e$$

を行うことなく計算できるというメリットがある。以下これを紹介する。

$g(x) = \log_a x$ とする。このとき，指数・対数の性質より $g(x) = \dfrac{\log x}{\log a}$ と表すこともできることに注意する。

$g(x)$ の導関数は

$$g'(x) = \frac{1}{x \log a}$$

であるので，接点の x 座標が u である C_2 の接線の方程式は

$$y = \frac{1}{u \log a}x - \frac{1}{\log a} + \frac{\log u}{\log a}$$

である。

これが原点を通るとき

$$-\frac{1}{\log a} + \frac{\log u}{\log a} = 0$$
$$u = e$$

であるので，接点の y 座標は

$$\frac{\log e}{\log a} = \frac{1}{\log a}$$

ゆえに，原点 O を通る C_2 の接線の接点の座標は

$$\left(e, \frac{1}{\log a}\right)$$

である。

このとき，C_1 と C_2 は直線 $y = x$ について対称であり，また原点 O は直線 $y = x$ 上の点である。

ゆえに，原点 O を通る C_1 の接線の接点の座標は

$$\left(\frac{1}{\log a}, e\right)$$

であり，このとき k と a が満たす関係式は

$$k = \frac{e}{\frac{1}{\log a}} = e \log a$$
$$a = e^{\frac{k}{e}}$$

である。

(3) C_1 と直線 $y=x\tan 75^\circ$ が共有点 A をもつとき，直線 $y=x$ について A と対称な点 B は C_2 および直線 $y=x\tan 15^\circ$ 上の点である。このとき

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}, \angle\mathrm{AOB}=60^\circ$$

であるので，三角形 OAB は正三角形となる。

ゆえに，C_1 と直線 $y=x\tan 75^\circ$ が共有点をもつとき，条件を満たさない。

一方，C_1 と直線 $y=x\tan 75^\circ$ が共有点をもたないとき，C_1 は不等式

$$y>0 \text{ かつ } y>x\tan 75^\circ$$

で表される領域に存在する。

これより，C_1 を原点中心に -60° だけ回転移動した曲線は不等式

$$y>x\tan 120^\circ \text{ かつ } y>x\tan 15^\circ$$

で表される領域 D に存在する。

一方，直線 $y=x$ についての対称性より，C_2 は不等式

$$x>0 \text{ かつ } y<x\tan 15^\circ$$

で表される領域に存在し，この領域は D との共通部分が空集合である。

ゆえに，C_1 上の任意の点 P について，P を原点中心に -60° だけ回転移動した点が C_2 上にあることは起こりえないので，三角形 OPQ が正三角形となることはない。

これより，条件を満たす k の条件は

$$k>\tan 75^\circ$$

であり，(1) で求めた a と k の関係を用いると，a についての条件は

$$a>e^{\frac{\tan 75^\circ}{e}}$$

である。

また，正接の加法定理を利用して $\tan 75^\circ$ を計算すると

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}\\ &= \frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\\ &= 2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。

ゆえに，求める a の範囲は

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{a > e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}}}$$

である。

(4) まず，曲線 C_1 の $x \leqq 0$ の部分に点 P をとったとき，3 点 O，P，Q を結んでできる図形が正三角形になることはないことを証明する。

領域 D を，不等式

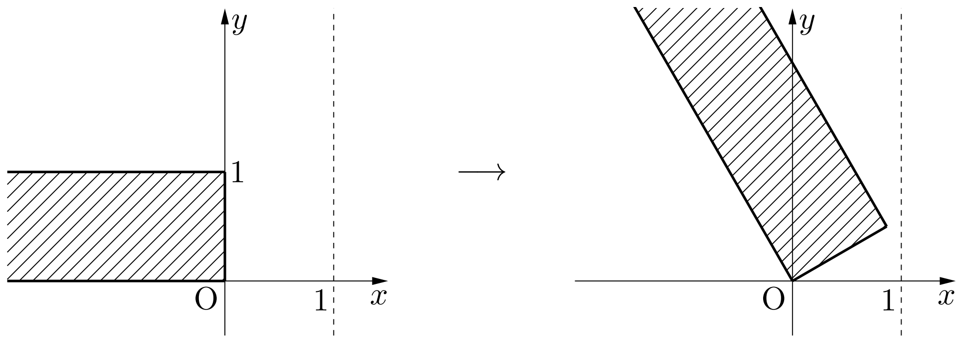
$$x \leqq 0 \text{ かつ } 0 \leqq y \leqq 1$$

を満たす点全体の集合と定めると，$a > 1$ より曲線 C_1 の $x \leqq 0$ の部分のすべての点は領域 D に含まれる。（下図の左側）

このとき，領域 D を原点を中心に $-60°$ だけ回転移動してできる領域を D' とすると，領域 D' は不等式

$$y \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}x \text{ かつ } -\sqrt{3}x \leqq y \leqq -\sqrt{3}x + 2$$

で表され，下の右の図のようになる。



ここで，領域 D' の点で x 座標が最大のものは $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ であるので，領域 D' は不等式

$$x < 1 \text{ かつ } y \geqq 0$$

で表される領域 D'' に含まれる。しかし，$a > 1$ より曲線 C_2 は領域 D'' を通過しない。

よって，点 P を C_1 の $x \leqq 0$ の部分にとったとき，$\angle\mathrm{POQ} = -60°$ となるような正三角形は存在しない。

また同様のことを，領域 D を原点を中心に $+60°$ だけ回転移動した領域について行うことで，$\angle\mathrm{POQ} = +60°$ となるような正三角形が存在しないことも示される。

ゆえに，点 P を C_1 の $x \leqq 0$ の部分にとったときは正三角形 OPQ を作ることができない。

次に，直線 $y = x$ について対称ではないような正三角形が存在しないことを証明する。

上の証明より，三角形 OPQ が正三角形となるとき，点 P は C_1 の第 1 象限の部分に存在する必要があり，また直線 $y = x$ についての対称性より点 Q も C_2 の第 1 象限の部分に存在する必要がある。

またこのとき，点 P の x 座標を t とおくと，線分 OP の長さは t を用いて

$$\sqrt{t^2 + a^{2t}}$$

と表され，$a > 1$ よりこれは明らかに t について単調増加である。

これより，$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ}$ を満たすような第 1 象限の点 P，Q は，直線 $y = x$ について対称であるようなものしか存在しない，つまり，正三角形 OPQ で直線 $y = x$ について対称でないものは存在しないことが証明された。

以上より，正三角形 OPQ がちょうど 3 個となるような k の条件は

$$k = \tan 15^\circ$$

であり，(1) を用いてこれを a の条件に直すと

$$a = e^{\frac{\tan 15^\circ}{e}}$$

である。

ここで，(3) より

$$\tan 15^\circ = \frac{1}{\tan 75^\circ} = 2 - \sqrt{3}$$

であるので，正三角形 OPQ がちょうど 3 個となるような a の条件は

$$\underline{a = e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}}}$$

である。