$\boxed{1}$

(1)　$2025 = 45^2 = 3^4 \cdot 5^2$ より

$$f(2025) = \frac{5 \cdot 3}{45} = \frac{1}{3}$$

(2)　$d(p^k) = k+1$ であるから

$$f(p^k) \leqq f(p^{k+1})$$
$$\frac{k+1}{\sqrt{p^k}} \leqq \frac{k+2}{\sqrt{p^{k+1}}}$$

$k+1 > 0, \sqrt{p^k} > 0$ より

$$\sqrt{p} \leqq \frac{k+2}{k+1} = 1 + \frac{1}{k+1} \cdots (*)$$

$k \geqq 1$ であるから

$$\sqrt{p} \leqq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$p \leqq \frac{9}{4}$$

p は素数であるから $p = 2$, このとき $(*)$ を満たすのは $k = 1$ のみである。

$$(p, k) = (2, 1)$$

(3)　$n \geqq 2$ のとき，n を素因数分解をして,

$$n = {p_1}^{q_1} \times {p_2}^{q_2} \times \cdots \times {p_s}^{q_s}$$

と表す。ただし，p_1〜p_s は $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$ を満たす素数，q_1〜q_s は正の整数である。
　このとき,$d(n) = (q_1+1)(q_2+1)\cdots(q_s+1)$ であるので

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(q_1+1)(q_2+1)\cdots(q_s+1)}{\sqrt{{p_1}^{q_1} \times {p_2}^{q_2} \times \cdots \times {p_s}^{q_s}}} \\ &= \frac{(q_1+1)}{\sqrt{{p_1}^{q_1}}} \times \frac{(q_2+1)}{\sqrt{{p_2}^{q_2}}} \times \cdots \times \frac{(q_s+1)}{\sqrt{{p_s}^{q_s}}} \\ &= f\left({p_1}^{q_1}\right) f\left({p_2}^{q_2}\right) \cdots f\left({p_s}^{q_s}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。これは正の数の積であるため，$f({p_1}^{q_1})$〜$f({p_s}^{q_s})$ のそれぞれの最大値を考えればよい。

$$f(1) = 1, f(p) = \frac{2}{\sqrt{p}}$$

であるので,$p \geqq 5$ のとき,(2) を繰り返し用いると

$$f(1) > f(p) > f(p^2) > \cdots > f(p^k)$$

が成り立つ。ゆえに，$f(n)$ が最大のとき,n は 5 以上の素因数を持たない。したがって，n は 2,3 のみしか素因数として持たず,

$$n = 2^a \cdot 3^b \quad (a, b \text{ は } 0 \text{ か正の整数})$$

と置ける。

$$f(n) = f(2^a) \cdot f(3^b)$$

が成立するが，(2) と $f(p) = \dfrac{2}{\sqrt{p}} > f(1) \quad (p = 2, 3)$ より，$f(2^a)$ は $a = 2$，$f(3^b)$ は $b = 1$ で最大となる。よって,

$$f(12) = \frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$$

より，$n = 12$ のとき，$f(n)$ は最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

$\boxed{2}$

(1)　C_2 の中心を $\mathrm{P}(2, t)$ とおくと,C_1 の中心 O(0,0) との距離は OP= $\sqrt{t^2+4}$ である。

(i)C_2 が C_1 に内接するとき

$$\sqrt{t^2+4}+1=3$$

$$t=0$$

(ii)C_2 が C_1 と外接するとき

$$\sqrt{t^2+4}=1+3$$

$$t=\pm 2\sqrt{3}$$

(i)(ii) の間にあるときが共有点が 2 つのときなので,

$$-2\sqrt{3}<t<0, 0<t<2\sqrt{3}$$

(2)　C_1, C_2 が共有点を 2 つ持つときを考える。$(x^2+y^2-9)-\{(x-2)^2+(y-t)^2-1\}=0$ すなわち $2x+ty=6+\dfrac{t^2}{2}$ は C_1, C_2 の 2 つの共有点を通る直線を表す。つまり，これは直線 l の方程式である.

求める点の座標を $\mathrm{Q}(a, b)$ とする。

(i)P が l 上にあるとき

$$4+t^2=6+\frac{t^2}{2}$$

$$t=\pm 2$$

であり,$\mathrm{Q}(2, \pm 2)$

(ii)P が l 上にないとき,l は x 軸に垂直ではないので,$a \neq 2$ が成り立つ。

P,Q は l に関して対称なので

$$\mathrm{PQ} \perp l \cdots ①\text{かつ PQ の中点は } l \text{ 上にある} \cdots ②$$

が成り立つ。

①について,$t \neq 0$ であるので,l の傾きは $-\dfrac{2}{t}$ であるから,

$$\frac{b-t}{a-2}=\frac{t}{2}$$

$$2b=at \quad \cdots ③$$

② について

$$2(2+a)+t(t+b)=12+t^2$$

$$2a+bt=8 \quad \cdots ④$$

$a \neq 0$ のとき,③,④より

$$(a-2)^2+b^2=4$$

　また $a=0$ のとき③より $b=0$ となるので

$$2a+bt=0$$

となり,④を満たさないため不適。

$$(a-2)^2+b^2=4$$

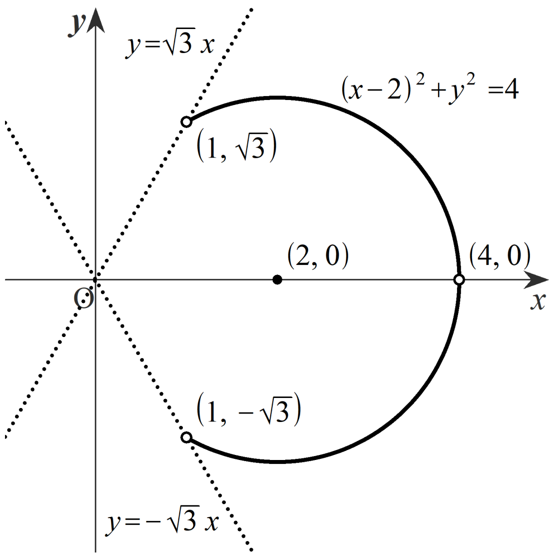
$a \neq 0, 2$ のうち $b=\dfrac{t}{2}a$ となる t が (1) の範囲に存在する部分となる。
　(i)(ii) より点 Q は

$$(x-2)^2+y^2=4 \text{ 上の } y=\frac{t}{2}x\,(0<|t|<\sqrt{3}) \text{ と交わる部分 (ただし原点を除く)}$$

つまり

$$(x-2)^2+y^2=4\,(1<x<4)$$

となり，次図の実線部分となる。



$\boxed{\mathbf{3}}$

$f(a)=-a^2+2a+6\displaystyle\int_0^2|x^2-a|dx$ とおき,a の値で場合分けをする。

(i)　$0 \leqq a \leqq 4$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^2|x^2-a|dx &= -\int_0^{\sqrt{a}}(x^2-a)dx+\int_{\sqrt{a}}^2(x^2-a)dx\\ &= -\left[\frac{x^3}{3}-ax\right]_0^{\sqrt{a}}+\left[\frac{x^3}{3}-ax\right]_{\sqrt{a}}^2\\ &= \frac{8}{3}-2a+\frac{4a\sqrt{a}}{3}\end{aligned}$$

より,

$$f(a)=-a^2+8a\sqrt{a}-10a+16$$

ここで,$\sqrt{a}=b$ とおき,

$$g(b)=-b^4+8b^3-10b^2+16\quad(0 \leqq b \leqq 2)$$

とおく。b で微分して

$$\begin{aligned}g'(b)&=-4b^3+24b^2-20b\\ &=-4b(b-1)(b-5)\end{aligned}$$

ゆえに,$g(b)$ の増減表は次の通り。

b	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(b)$		$-$	0	$+$	
$g(b)$	16	$\searrow$	13	$\nearrow$	24

a に対する $f(a)$ の増減も $a=b^2=1$ で極小となる ($0 \leqq a \leqq 1$ で減少して,$1 \leqq a \leqq 4$ で増加する)。

(ii)　$a \geqq 4$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^2|x^2-a|dx &= -\left[\frac{x^3}{3}-ax\right]_0^2\\ &= -\frac{8}{3}+2a\end{aligned}$$

より,

$$f(a)=-a^2+14a-16$$

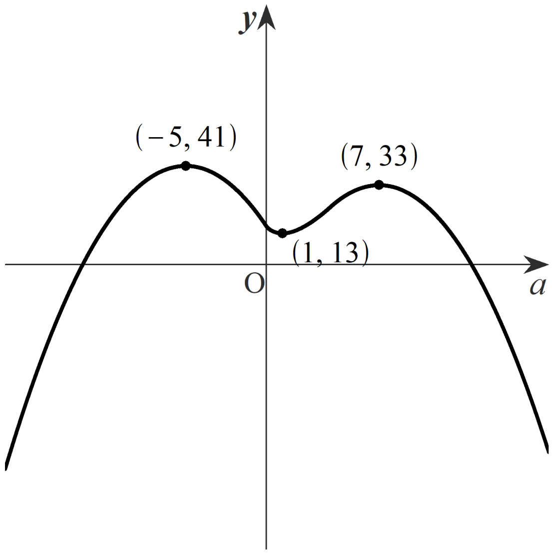
(iii)　$a \leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^2|x^2-a|dx &= \left[\frac{x^3}{3}-ax\right]_0^2\\ &= \frac{8}{3}-2a\end{aligned}$$

より

$$f(a) = -a^2 - 10a + 16$$

以上より，$y = f(a)$ のグラフは次のようになる。



よって，$y = f(a)$ と $y = k$ の共有点の数がちょうど 4 つになるような実数 k の範囲を考えることで，求める範囲は

$$\underline{13 < k < 33}$$

である。

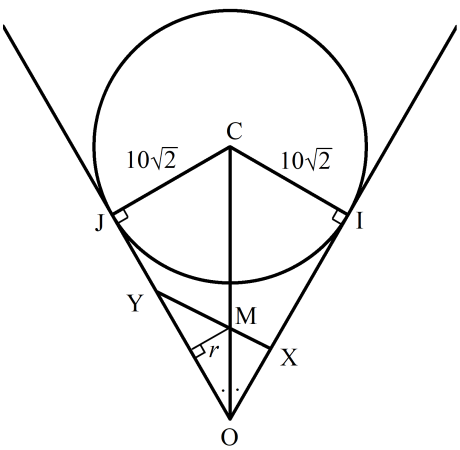
$\boxed{4}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,2,-2),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,0,4)$$

で定まる点 X,Y について , D は平面 OXY 上で, 半直線 OX と半直線 OY の間の部分となる。

　C の中心を C とすると, 点 C と直線 OX,OY との距離はともに $10\sqrt{2}$ となる。C と OX,OY との接点をそれぞれ I,J とすると $\triangle\mathrm{OCI}\equiv\triangle\mathrm{OCJ}$ が成り立つので直線 OC は $\angle$ XOY の二等分線となる。直線 OC と線分 XY の交点を M とすると角の二等分線の性質より

$$\mathrm{XM}:\mathrm{MY}=\mathrm{OX}:\mathrm{OY}=3:5$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OX}}+3\overrightarrow{\mathrm{OY}}}{8}=\left(\frac{7}{4},\frac{5}{4},\frac{1}{4}\right)$$



$$\triangle\mathrm{OXY}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OY}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{225-(-5)^2}=5\sqrt{2}$$

M と OX,OY の距離を r とすると

$$\frac{1}{2}(5+3)r=5\sqrt{2}$$
$$r=\frac{10\sqrt{2}}{8}$$

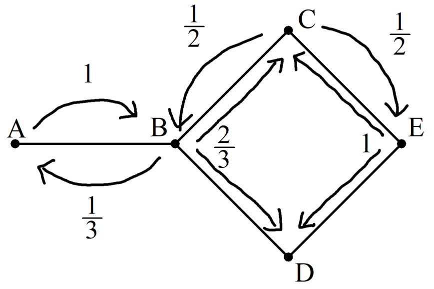
より,△COI と相似な斜辺が OM となる直角三角形の辺の比より

$$\mathrm{OM}:\mathrm{OC}=r:10\sqrt{2}=1:8$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=8\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(14,10,2)$$

以上より, 円の中心の座標は $(14,10,2)$ である。

$\boxed{5}$

(1)　P_n と P_{n+1} は隣り合う頂点であり,$\mathrm{P}_1=$A であるので
P_n は n が奇数のとき,A,C,D のいずれか,n が偶数のとき,B,E のどちらかとなる。
$\mathrm{P}_n=$A となる確率を a_n,$\mathrm{P}_n=$B となる確率を b_n とする。
n が奇数のとき $p_n=a_n$，n が偶数のとき $p_n=b_n$ となる。



(i)　$n=2l-1$ のとき (l は正の整数)
$\mathrm{P}_{n+2}=$A となるとき $\mathrm{P}_n=$A,$\mathrm{P}_{n+1}=$B であるか，$\mathrm{P}_n=$C または D，$\mathrm{P}_{n+1}=$B である。
$\mathrm{P}_n=$C または D となる確率は $(1-a_n)$ であり，C,D いずれでも P_{n+2}=A となる確率は,$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}$ に注意して

$$a_{n+2}=1\cdot\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(1-a_n)$$

$$a_{n+2}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{6}$$

$a_1=1$ より

$$a_{2l-1}=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{l-1}+\frac{1}{5}$$

(ii)　$n=2l$ のとき (l は正の整数)
$\mathrm{P}_{n+1}=$B となるのは $\mathrm{P}_n=$A であるか，$\mathrm{P}_n=$C,D である。それぞれの推移を考えて

$$b_{2l}=a_{2l-1}+\frac{1}{2}(1-a_{2l-1})=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{l-1}$$

(i)(ii) より

$$p_n=\begin{cases}\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}+\dfrac{1}{5} & (n\text{ は奇数}),\\[2ex] \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1}+\dfrac{3}{5} & (n\text{ は偶数})\end{cases}$$

(2)　$\mathrm{P}_n=$A,B かつ,$\mathrm{P}_k\neq\mathrm{E}(k=1,2,3,\cdots,n)$ となる確率を r_n とする。
n が偶数のときにしか E になり得ないことに注意して場合分けをする。

(i)　$n=2l$ のとき (l は正の整数)

$\mathrm{P}_{2k}=\mathrm{B}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ であればよい。$\mathrm{P}_2=$B であり, それ以降は確率 $\dfrac{2}{3}$ で 2 つ先も B になることより

$$r_{2l}=1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{l-1}$$

(ii)　$n=2l+1$ のとき (l は正の整数)

(i) の条件が満たされたうえで,$\mathrm{P}_{2l+1}=$A であればよいので

$$r_{2l+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{l-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{l}$$

(iii)　$n=1$ のとき

$$r_1=1$$

以上より, 求める条件付き確率は

$$q_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\[2mm] \dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}+\dfrac{1}{5}} & (n\ \text{は 3 以上の奇数})\\[2mm] \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1}+\dfrac{3}{5}} & (n\ \text{は偶数})\end{cases}$$