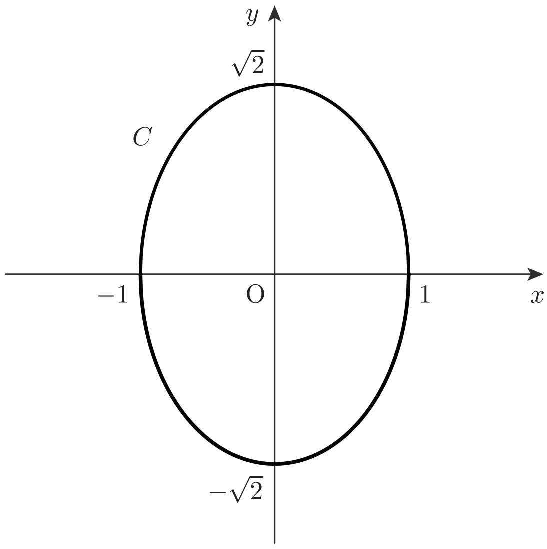
2025　早稲田大学　基幹・創造・先進理工学部　数学　解答例

[I]　(1)　$z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおける。また，x，y を実数とし，$w = x + yi$ とする。このとき

$$\begin{aligned} x + yi &= \frac{1+\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= \cos\theta + (\sqrt{2}\sin\theta)i \end{aligned}$$

により，$x = \cos\theta$，$y = \sqrt{2}\sin\theta$ である。よって，C は楕円 $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$ である。



(2)　C の方程式は $2x^2 + y^2 = 2$ と表せる。一方，与えられた円の方程式は

$$\left(x - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 = 2$$

と表せる。2 式から y を消去すると

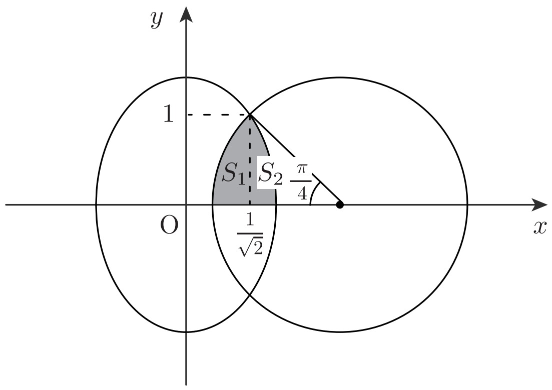
$$2x^2 = \left(x - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{2}x = \pm\left(x - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (-1 \leqq x \leqq 1 \text{ に注意する})$$

である。この式を $2x^2 + y^2 = 2$ に代入すると $y = \pm 1$ である。ゆえに，共有点を表す複素数は $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \pm i$ である。

(3)　題意の図形を x 軸で分けたとき，上側にある図形に着目する。この図形をさらに，直線 $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で 2 つに分けて，左側の面積を S_1，右側の面積を S_2 とする。

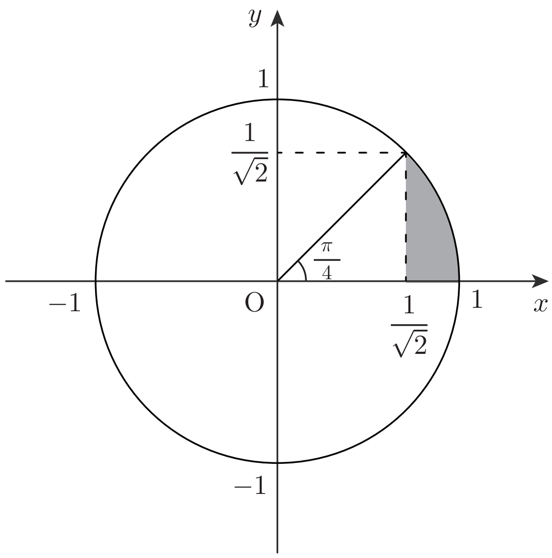


$$S_1=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

である。S_2 は次の図の灰色の図形の面積の $\sqrt{2}$ 倍であるから

$$S_2=\sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

である。



ゆえに，求める面積は

$$2(S_1+S_2)=\underline{\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

である。

[Ⅱ] $\log\dfrac{1}{x} = -\log x$ である。ここで，$y = -\log x$ の $0 < x \leqq 1$ の部分を C とする。$y' = -\dfrac{1}{x}$，$y'' = \dfrac{1}{x^2}$ より $y'' > 0$ である。すなわち，C は下に凸の曲線である。

ここで，D に含まれる三角形の一例として，図 1 のような三角形を考える。この三角形を上側に平行移動すると，いずれは C と共有点をもつ。共有点は 1 点のみで，三角形の頂点または辺上にある。図 2 では，辺上にある。この点を P とする。さらに，図 3 のように，C の点 P における接線を考えると，三角形は接線より上側に来ることはない。すなわち，題意の三角形は最初から C の接線と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積とみなすことができる。

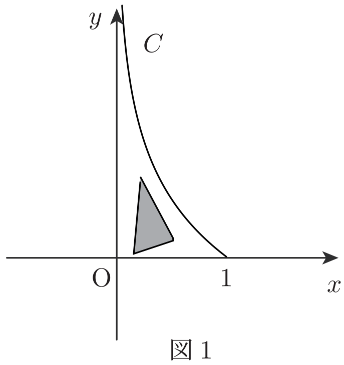


図 1

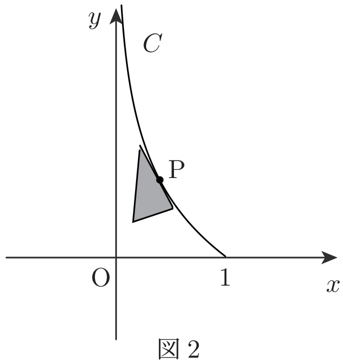


図 2

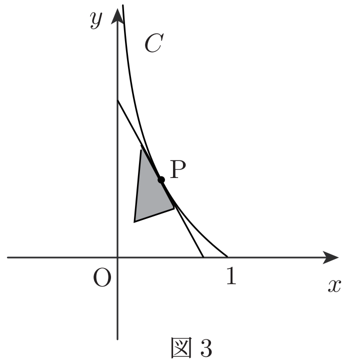


図 3

$0 < t < 1$ とし，C 上に点 $\mathrm{P}(t,\ -\log t)$ をとる。点 P での C の接線の方程式は

$$y = -\frac{1}{t}(x - t) - \log t = -\frac{1}{t}x + 1 - \log t$$

である。この接線と x 軸との交点を Q とすると $\mathrm{Q}(t(1-\log t),\ 0)$ であり，この接線と y 軸との交点を R とすると，$\mathrm{R}(0,\ 1-\log t)$ である。この三角形の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = \triangle\mathrm{OQR} = \frac{1}{2}t(1-\log t)^2$$

である。

$$S'(t) = \frac{1}{2}\left\{(1-\log t)^2 + t\cdot 2(1-\log t)\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)\right\} = \frac{(1-\log t)(-1-\log t)}{2}$$

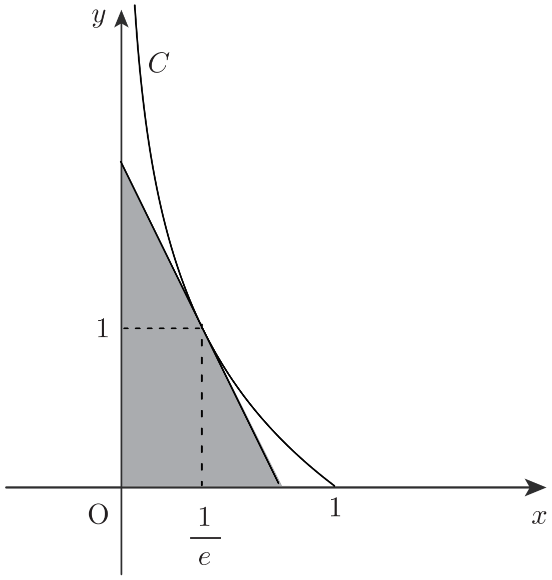
である。よって，$S(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ゆえに，求める最大値は

$$S\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

である。



y
C
1
O
$\frac{1}{e}$
1
x

[III]　最初は，1，2，$\cdots$，n という自然数がこの順に並んでおり，これらを並び替えると考える。ただし，全く並び替えないという順列も 1 通りと考えて，順列は全部で $n!$ 通りある。

(1)　条件を満たすものを次のように列挙する。

2，1，4，3　　2，3，4，1　　2，4，1，3　　3，1，4，2　　3，4，1，2
3，4，2，1　　4，1，2，3　　4，3，1，2　　4，3，2，1

よって，$a_4 = 9$ である。

(2)　もともと 1 があった位置に来る数の選び方は $(n-1)$ 通りある。この数を k とする。k の値を定めた後，次のように場合分けをする。

- もともと k があった位置に 1 が来るとする。このとき，1，k 以外の数の並べ方で，条件を満たすものは a_{n-2} 通りある。
- もともと k があった位置に 1 は来ないとする。このとき，k 以外の数の並べ方で，条件を満たすものは a_{n-1} 通りある。

ゆえに，$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$ が成り立つ。

(3)　(2) で得た漸化式の両辺を $n!$ で割ると

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{n-1}{n!}(a_{n-1} + a_{n-2})$$

であり，$\{p_n\}$ の定義により

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)p_{n-1} + \frac{1}{n}p_{n-2}$$

である。両辺から p_{n-1} を引くと

$$p_n - p_{n-1} = -\frac{1}{n}(p_{n-1} - p_{n-2})$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned} p_n - p_{n-1} &= \left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(p_2 - p_1) \\ &= \frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 3}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \end{aligned}$$

である。

[IV]　(1)　$i=1,\ 2,\ 3$ に対して S と S_i の接点を Q_i とする。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\frac{r}{r+1}\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}=\frac{r}{r+2}\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OQ_3}}=\frac{r}{r+3}\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{4}\left(\frac{r+1}{r}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+\frac{r+2}{r}\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}+\frac{r+3}{r}\overrightarrow{\mathrm{OQ_3}}\right)$$

である。この式の右辺の係数の和が 1 になることから

$$\frac{1}{4}\left(\frac{r+1}{r}+\frac{r+2}{r}+\frac{r+3}{r}\right)=1$$

$$r=\underset{\sim}{6}$$

である。

(2)　$\triangle\mathrm{P_1P_2P_3}$ に着目する。$\mathrm{P_1P_2}=3,\ \mathrm{P_2P_3}=5,\ \mathrm{P_3P_1}=4$ より，この三角形は直角三角形である。その面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=6$$

である。

次に $\triangle\mathrm{OP_1P_2}$ に着目する。$\mathrm{OP_1}=7,\ \mathrm{OP_2}=8,\ \mathrm{P_1P_2}=3$ である。余弦定理より

$$3^2=7^2+8^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}=52$$

である。

同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}=60\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OP_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=57$$

である。

点 O から平面 $\mathrm{P_1P_2P_3}$ に下ろした垂線と，この平面との交点を H とする。また

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+s\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}$$

とする。

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}\\&=\left\{(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+s\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}\right\}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\right)\\&=(1-s-t)\cdot7^2-(1-s-t)\cdot52+s\cdot52-s\cdot8^2+t\cdot57-t\cdot60\\&=3(-3s-1)\end{aligned}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}=0$ より $s=-\dfrac{1}{3}$ である。同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_3P_1}}=0$ より $t=-\dfrac{1}{2}$ である。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{11}{6}\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}=\frac{1}{6}(11\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}-2\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}-3\overrightarrow{\mathrm{OP_3}})$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 &= \left(\frac{1}{6}\right)^2 (121\cdot 49 + 4\cdot 64 + 9\cdot 81 - 44\cdot 52 - 66\cdot 57 + 12\cdot 60)\\ &=44\end{aligned}$$

である。つまり，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = 2\sqrt{11}$ である。したがって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\cdot S = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{11}\cdot 6 = 4\sqrt{11}$$

である。

[V]　(1)　ℓ の方程式は $y-b=k(x-a)$ であり，この式は

$$kx=y-b+ka \quad \cdots\cdots ①$$

と変形できる。また，C の方程式は

$$x^2=y^3-2 \quad \cdots\cdots ②$$

$$(kx)^2=k^2y^3-2k^2 \quad \cdots\cdots ③$$

と変形できる。①，③ から x を消去すると

$$(y-b+ka)^2=k^2y^3-2k^2$$

$$(y-b)^2+2ka(y-b)+k^2a^2=k^2y^3-2k^2$$

である。問題文により，この式は y の 3 次方程式である。つまり，k は 0 でない。なお，k が 0 ではないことは後述の ⑤ と a が 0 でないことからも判断できる。ここで，3 次方程式の解と係数の関係を用いる。y^3，y^2 の係数に着目すると

$$b+b+b'=\frac{1}{k^2}$$

$$2b+b'=\frac{1}{k^2}$$

である。

(2)　② の両辺を x で微分すると

$$2x=3y^2y' \quad \cdots\cdots ④$$

である。$x=a$ のとき $y=b$ で，$y'=k$ であるから，④ により

$$2a=3b^2k$$

$$k=\frac{2a}{3b^2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

である。よって，(1) から

$$\begin{aligned} b' &= -2b+\frac{9b^4}{4a^2} \\ &= -2b+\frac{9b^4}{4(b^3-2)} \\ &= \frac{b^4+16b}{4(b^3-2)} \end{aligned}$$

である。

(3)　b が有理数であるから，b^4+16b，$4(b^3-2)$ はともに有理数である。つまり，b' も有理数である。一方，a，b が有理数であるから，⑤ により k も有理数である。ℓ の方程式は

$$y-b=k(x-a)$$

であり，この直線上に点 $\mathrm{P}'(a',\ b')$ があるから

$$b'-b=k(a'-a)$$

$$a'=\frac{b'-b}{k}+a$$

が成り立つ。b'，b，k，a が有理数であるから，a' も有理数であることが証明された。

(4)　$$\begin{aligned}b'&=\frac{b^4+16b}{4(b^3-2)}\\&=\frac{\dfrac{p^4}{2^{4r}q^4}+16\cdot\dfrac{p}{2^rq}}{4\left(\dfrac{p^3}{2^{3r}q^3}-2\right)}\\&=\frac{p^4+2^{3r+4}pq^3}{4(p^3\cdot 2^rq-2^{4r+1}q^4)}\quad(\text{分母・分子に }2^{4r}q^4\text{を掛けた})\\&=\frac{p^4+2^{3r+4}pq^3}{2^{r+2}(p^3q-2^{3r+1}q^4)}\end{aligned}$$

である。ここで得た式の右辺の，分子は奇数であるから，それを p' とおける。分母のうち，2^{r+2} 以外の部分も奇数であるから，それを q' とおける。つまり

$$b'=\frac{p'}{2^{r+2}q'}$$

より $s=r+2$ である。

(5)　$a=5$，$b=3$ とすると，a，b はともに有理数で，$b=\dfrac{3}{2^0\cdot 1}$ と表せる。(3) により点 $\mathrm{P}'(a',\ b')$ を定義すると，a'，b' はともに有理数である。また，(4) により，奇数 p'，q' を用いて，$b'=\dfrac{p'}{2^2q'}$ と表せる。再び (3) により点 $\mathrm{P}''(a'',\ b'')$ を定義すると，a''，b'' はともに有理数である。また，(4) により，奇数 p''，q'' を用いて，$b''=\dfrac{p''}{2^4q''}$ と表せる。この操作を無限回行うことができ，b，b'，b''，$\cdots$ の分母の 2 の指数部分が 2 ずつ増えるので，点 P，P'，P''，$\cdots$ の y 座標はすべて異なる。ゆえに，C 上に x 座標と y 座標がともに有理数である点が無数に存在することが証明できた。