2025　早稲田大学　教育学部　数学　解答例

$\boxed{1}$

(1) $k(2k+1)$　(2) $\left(\dfrac{3\sqrt{3}+1}{12},\ \dfrac{3\sqrt{3}-1}{12}\right)$　(3) $\dfrac{1}{7}$　(4) $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$

$\boxed{2}$

(1)

$n \geqq 3$ とする．

1 回目に取り出したカード 2 枚が同じ数字となる取り出し方の総数は，n 枚ある赤色のカードと白色のカードそれぞれから同じ数字を取り出すような取り出し方の総数である．

これは，1 から n までの数字 n 個の数字の中から 1 つ選ぶ選び方の総数と同じである．

2 回目のカードの取り出し方の総数は，1 回目に取り出したカード以外のカードから 2 枚取り出すような取り出し方の総数である．

これは，$2n$ 枚のカードから 1 回目で選んだ 2 枚のカードを除いた $2n-2$ 枚のカードから 2 枚のカードを選ぶ総数である．

これより

$$ {}_{2n-2}\mathrm{C}_2\ \text{[通り]} $$

となる．よって，求める取り出し方の総数は

$$ n \times {}_{2n-2}\mathrm{C}_2 = n(n-1)(2n-3)\ \text{[通り]} $$

これは，$n=1$，$n=2$ のときも成り立つ．

(2)

$n \geqq 4$ とする．

1 回目に取り出した 2 枚のカードが異なる数字となる取り出し方の総数は，$2n$ 枚のカードから 2 枚選ぶ選び方の総数から，(1) で求めた同じカードを 2 枚取り出すような取り出し方の総数を除いたものである．すなわち

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_2 - n\ \text{[通り]} $$

である．

2 回目において 1 回目に取り出したカードと同じ数字がない取り出し方の総数は，$2n$ 枚のカードから，1 回目に取り出した数字 2 つに対して，赤と白の 2 枚ずつカードがあるの

で，それら 4 枚を取り除いた $2n-4$ 枚から 2 枚選ぶ総数である．
これより

$$ {}_{2n-4}\mathrm{C}_2 \text{ [通り]} $$

となる．これより求める取り出し方の総数は

$$ ({}_{2n}\mathrm{C}_2 - n) \times {}_{2n-4}\mathrm{C}_2 = \underline{2n(n-1)(n-2)(2n-5) \text{ [通り]}} $$

これは，$n=1$，$n=2$，$n=3$ のときも成り立つ．

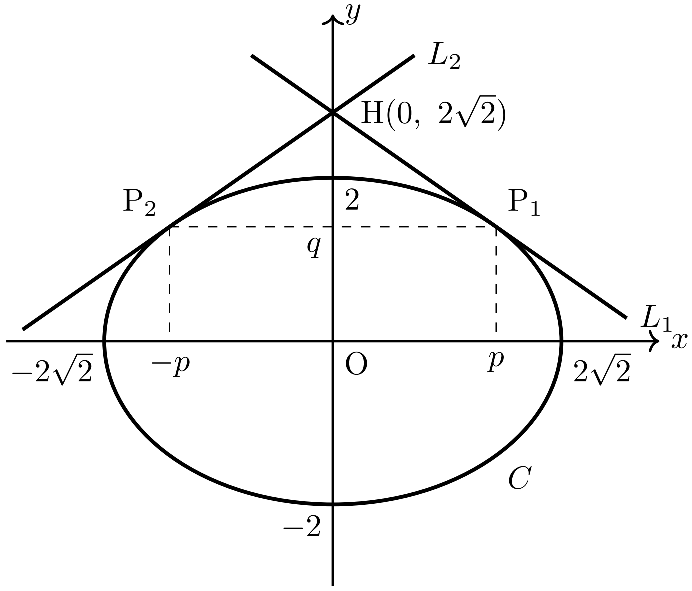
(3)
(3) が起こる事象は，(1) または (2) が起こる事象の余事象である．
(1) と (2) の事象は排反である．
2 回におけるカードの取り出し方の総数は，1 回目，2 回目ともに $2n$ 枚のカードから 2 枚のカードを選ぶ総数であるから

$$ ({}_{2n}\mathrm{C}_2)^2 \quad \text{[通り]} $$

である．これより，求める確率は

$$ \begin{aligned} &1 - \frac{n(n-1)(2n-3) + 2n(n-1)(n-2)(2n-5)}{({}_{2n}\mathrm{C}_2)^2} \\ =&1 - \frac{(n-1)(2n-3) + 2(n-1)(n-2)(2n-5)}{n(2n-1)^2} \\ =&\frac{n(2n-1)^2 - (n-1)(2n-3+4n^2-18n+20)}{n(2n-1)^2} \\ =&\underline{\frac{16n^2-32n+17}{n(2n-1)^2}} \end{aligned} $$

$\boxed{3}$



(1)

y 軸について対称であることから，P_1，P_2 は

$$\mathrm{P}_1(p,\ q),\ \mathrm{P}_2(-p,\ q)\ (\text{ただし，}p>0)$$

とおける．すると

$$L_1 : px+2qy=8 \quad \cdots\cdots ①$$
$$L_2 : -px+2qy=8 \quad \cdots\cdots ②$$

と表すことができる．これらは H を通るので，①，②より

$$0+2q\cdot 2\sqrt{2}=8$$
$$q=\sqrt{2}$$

となる．P_1 は C 上で $p>0$ であるから $p^2+2q^2=8$ と合わせて

$$p=2$$

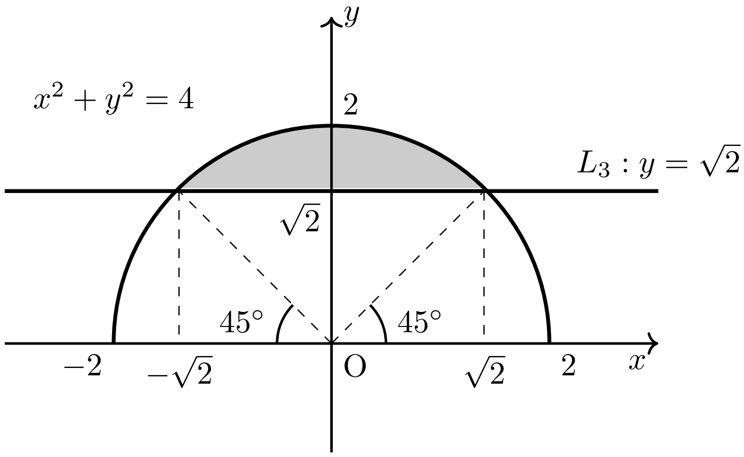
となるので

$$\mathrm{P}_1(2,\ \sqrt{2}),\ \mathrm{P}_2(-2,\ \sqrt{2})$$

となる．よって

$$L_1\text{ の傾き}:-\frac{p}{2q}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad L_2\text{ の傾き}:\frac{p}{2q}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2)



(1) より，$\mathrm{P}_1(2, \sqrt{2})$，$\mathrm{P}_2(-2, \sqrt{2})$ であるので

$$L_3 : y=\sqrt{2}$$

である．面積を求める領域は，上図の灰色部分を水平方向に $\sqrt{2}$ 倍に拡大したものである．この部分の面積 S' は

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot 2^2 \\ &= \pi-2 \end{aligned}$$

となる．よって，求める面積 S は，S' を $\sqrt{2}$ 倍して

$$S=\underline{\sqrt{2}(\pi-2)}.$$

$\boxed{4}$

(1)

$$y' = (3x^2-1)e^{-x} - (x^3-x+2)e^{-x} = -(x+1)(x-1)(x-3)e^{-x}$$

となる．これより，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$2e$	$\searrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\nearrow$	$\dfrac{26}{e^3}$	$\searrow$

ここで

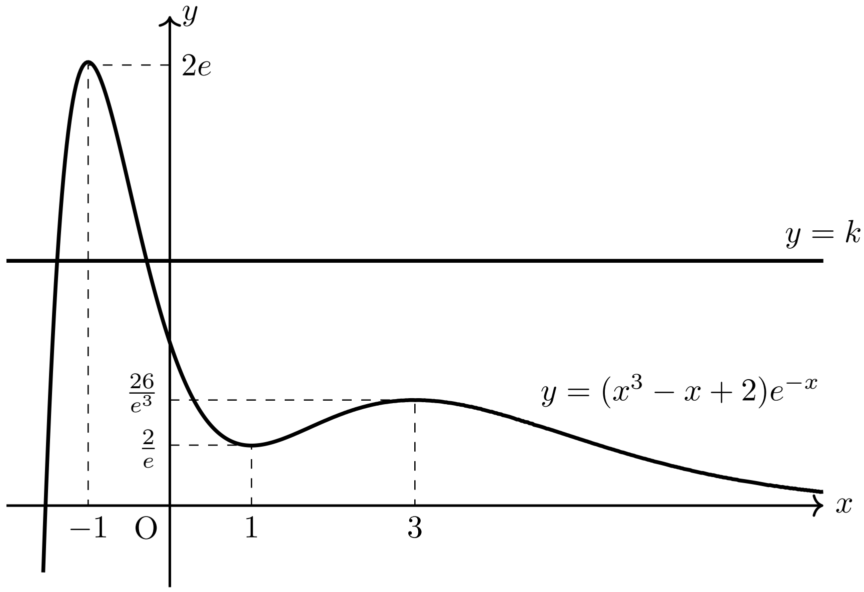
$$\lim_{x\to\infty}\left\{(x^3-x+2)e^{-x}\right\} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{(x^3-x+2)e^{-x}\right\} = \lim_{x\to-\infty} = \left\{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^{-x}\right\} = -\infty$$

となる．また，$e>2$ より $e^4>16>13$ であることから

$$\frac{26}{e^3} - 2e = \frac{2}{e^3}(13-e^4) < 0$$

である．これよりグラフは下のようになる．



よって，$f(k)$ は

$\dfrac{2}{e} < k < \dfrac{26}{e^3}$ のとき，最大値 $f(k)=4$

であり

$$2e < k \text{ のとき，最小値 } f(k) = 0$$

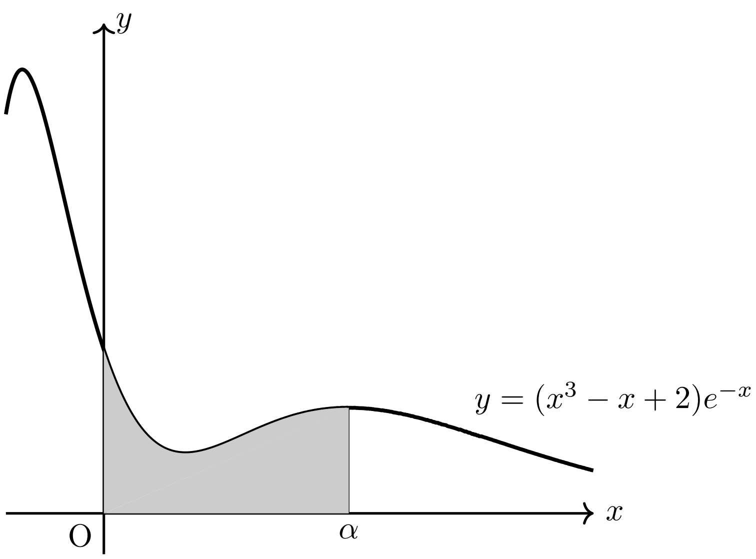
(2)

$f(k) = 2$ となる k の範囲は，前図において，共有点が 2 個となる場合であるので

$$0 < k < \frac{2}{e},\quad \frac{26}{e^3} < k < 2e$$

となる．

(3)



求める面積を，図の灰色部分と解釈する．

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\alpha} (x^3 - x + 2)e^{-x}dx \\
&= \Big[-(x^3 - x + 2)e^{-x} \Big]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} (3x^2 - 1)e^{-x}dx \\
&= -(\alpha^3 - \alpha + 2)e^{-\alpha} + 2 + \Big[-(3x^2 - 1)e^{-x} \Big]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} 6xe^{-x}dx \\
&= -(\alpha^3 + 3\alpha^2 - \alpha + 1)e^{-\alpha} + 1 + \Big[-6xe^{-x} \Big]_0^{\alpha} + 6\int_0^{\alpha} e^{-x}dx \\
&= -(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 5\alpha + 1)e^{-\alpha} + 1 + 6\Big[-e^{x} \Big]_0^{\alpha} \\
&= -(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 5\alpha + 7)e^{-\alpha} + 7
\end{aligned}$$