2025　早稲田大学　商学部　数学　解答例

$\boxed{1}$

ア	$2 \cdot 3^{-\frac{3}{4}}$
イ	$\dfrac{(n-1)(2025-n)}{2}$
ウ	$40x^2$
エ	192 通り

$\boxed{2}$

(1)　$\mathrm{P}_{2m-1}(0, y_{2m-1})$ とおく．このとき $\mathrm{P}_{2m}(0, -y_{2m-1})$ であるから，

$$y_{2m+1} = 1 - (-y_{2m-1} - 1) = y_{2m-1} + 2.$$

よって，$\{y_{2m-1}\}$ は初項 $y_1 = 0$，公差 2 の等差数列で，y_{2025} はこの数列の第 1013 項より

$$y_{2025} = 2 \cdot (1013 - 1) = 2024.$$

これより

$$\mathrm{P}_{2025}(0, 2024)$$

となる．

(2)　直線 $y = x$ に関して (X, Y) と対称な点は (Y, X) であることに注意して $\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots$ を求めていく．

$$\mathrm{P}_1(2,1),\ \mathrm{P}_2(2,-1),\ \mathrm{P}_3(-1,2),\ \mathrm{P}_4(-1,-2),\ \mathrm{P}_5(-2,-1),$$
$$\mathrm{P}_6(-2,1),\ \mathrm{P}_7(1,-2),\ \mathrm{P}_8(1,2),\ \mathrm{P}_9(2,1),\ \cdots.$$

よって，点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ は周期 8 をもち，

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_9 = \mathrm{P}_{17} = \cdots = \mathrm{P}_{8k+1} = \cdots$$

であることが分かる．ここで $2025 = 8 \cdot 253 + 1$ より

$$\mathrm{P}_{2025}(2, 1).$$

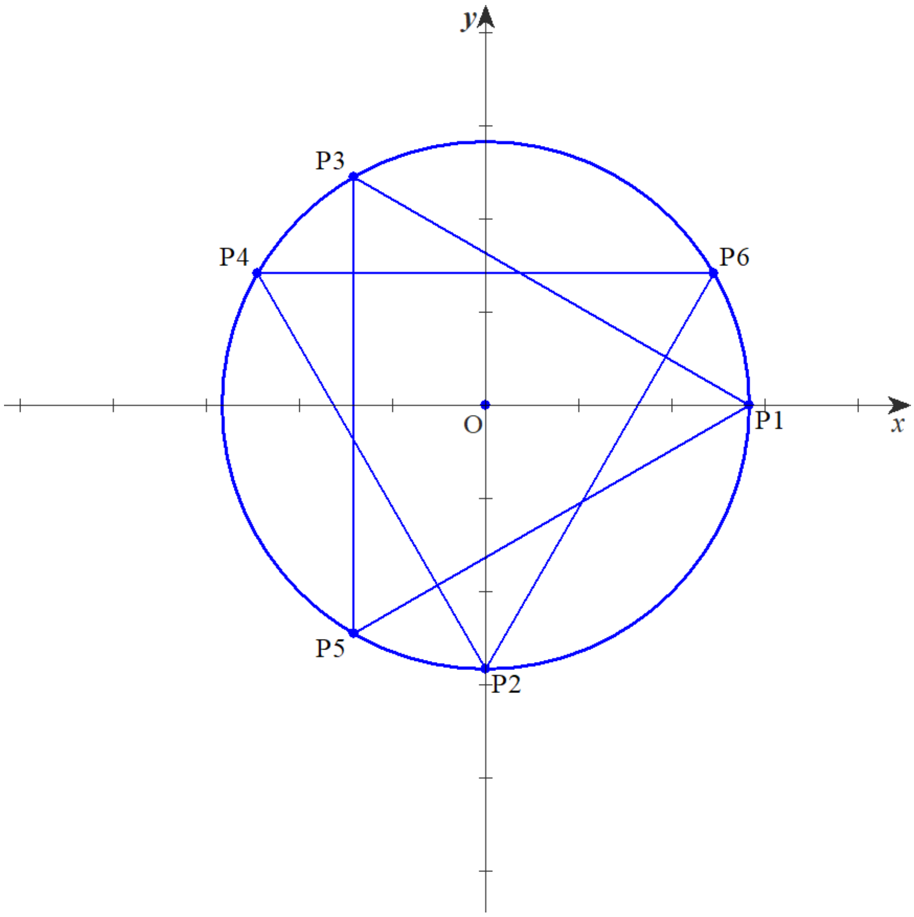
(3)　直線 $y = \sqrt{3}x$ に関して (X, Y) と対称な点は $\left(\dfrac{-X+\sqrt{3}Y}{2}, \dfrac{\sqrt{3}X+Y}{2}\right)$ であることに注意して $\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots$ を求めていくと，

$$\mathrm{P}_1(1,1),\ \mathrm{P}_2(1,-1),\ \mathrm{P}_3\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right),\ \mathrm{P}_4\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right),$$
$$\mathrm{P}_5\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right),\ \mathrm{P}_6\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right),\ \mathrm{P}_7(1,1)$$

より点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ は周期 6 をもつ．ここで $\mathrm{O}(0,0)$ として $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_5$ および $\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_6$ がなす三角形をそれぞれ考えると，

$$\mathrm{OP}_1 = \mathrm{OP}_2 = \cdots = \mathrm{OP}_6 = \sqrt{2},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_3} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_5} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_4} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_6} = (0, 0)$$

であり，外心と重心が一致することよりこれらは正三角形である．さらに，点 P_2 は P_1 を，O を中心として時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させたものであるから，適当に回転して考えれば，$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_6$ の位置関係は下図のようになる．



$\mathrm{P}_m\mathrm{P}_n$ が最大になるのは，$\angle \mathrm{P}_m\mathrm{OP}_n$ が最大になるときである．上図より $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_4 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6}$ が最大である．ここで余弦定理より

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_4{}^2 = 2 + 2 - 2\cdot 2\cos\frac{5\pi}{6} = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$$

であるから，求める最大値は

$$\sqrt{3}+1$$

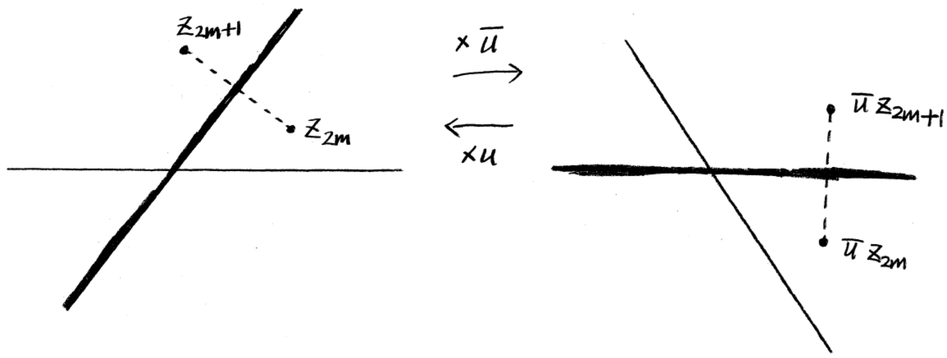
となる．

（参考）　出題範囲外ではあるが，複素数平面の問題としてとらえると考えやすい．座標平面と複素数平面を同一視し，P_n に対応する複素数を z_n とする．

(2)　$u = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とすると下図から

$$\begin{aligned} z_{2m} &= \overline{z_{2m-1}}, \\ z_{2m+1} &= u(\overline{\overline{u}z_{2m}}) \\ &= u^2\overline{z_{2m}} \\ &= iz_{2m-1} \end{aligned}$$

となり，これより $z_{2m+9} = i^4 z_{2m+1} = z_{2m+1} = \cdots = z_1$ が分かる．



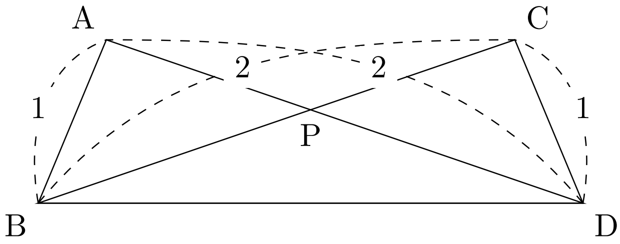
(3)　(2) と同様に考えて $w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とすれば

$$z_{2m+1}=w^2z_{2m-1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}z_{2m-1},$$
$$z_{2m+2}=\overline{z_{2m+1}}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\overline{z_{2m-1}}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}z_{2m}$$

より P_n は，n が奇数のとき反時計回りに $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_5$ の順に並ぶ正三角形，n が偶数のとき時計回りに $\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_6$ の順に並ぶ正三角形であることが分かる．

$\boxed{3}$

(1)



まず線分 AD と線分 BC が交わることから 4 点は上図のように同一平面上にある．$\triangle$ABD と $\triangle$CDB は三辺が等しいので合同．よって $\angle$BAD=$\angle$DCB．これと $\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{CPD}$ より $\triangle\mathrm{ABP} \backsim \triangle\mathrm{CDP}$ となるが，$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = 1$ なので $\triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{CDP}$ である．よって

$$2t = \mathrm{BP} = \mathrm{PD} = 2 - 2s$$

となるから，

$$s = 1 - t.$$

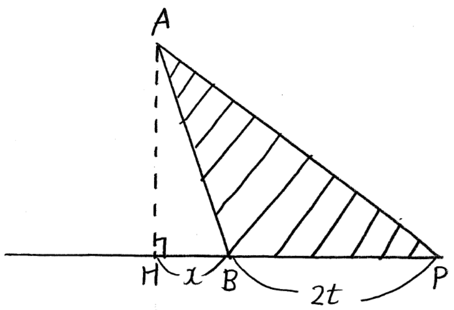
(2)　$\triangle$ABP において三角形の成立条件

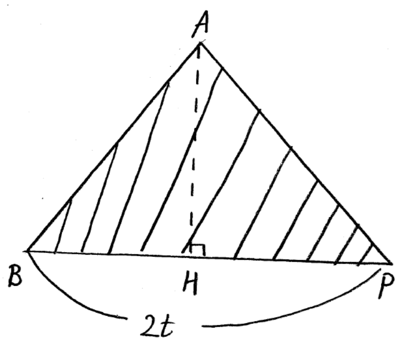
$$\begin{cases} 1 + 2t = \mathrm{AB} + \mathrm{BP} > \mathrm{PA} = 2 - 2t, \\ 2t + (2 - 2t) = \mathrm{BP} + \mathrm{PA} > \mathrm{AB} = 1, \\ (2 - 2t) + 1 = \mathrm{PA} + \mathrm{AB} > \mathrm{BP} = 2t \end{cases}$$

より

$$\frac{1}{4} < t < \frac{3}{4}.$$

(3)　A から BC に下ろした垂線の足を H とする．$\mathrm{BP} + \mathrm{AP} = 2$ より AB の長さは BP，PA のどちらか以下であることに注意すると，H は半直線 PB 上にあることが分かる．





上左図のとき，問題の回転体の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot(2t+x)\cdot \mathrm{AH}^2\pi-\frac{1}{3}\cdot x\cdot \mathrm{AH}^2\pi$$

であるから，上図のどちらの場合でも体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot 2t\cdot \mathrm{AH}^2\pi$$

で与えられる．ここで余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}1=\mathrm{AB}^2&=(2t)^2+(2-2t)^2-2\cdot 2t(2-2t)\cos\angle\mathrm{APB}\\&=8t^2-8t+4+8(t^2-t)\cos\angle\mathrm{APB}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{APB}&=\frac{8t^2-8t+3}{8(t-t^2)}\\&=-1+\frac{3}{8(t-t^2)}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{APB}&=\sqrt{1-\left(-1+\frac{3}{8(t-t^2)}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{-48t^2+48t-9}}{8(t-t^2)}.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}V&=\frac{2t\pi}{3}(\mathrm{AP}\sin\angle\mathrm{APB})^2\\&=\frac{2t\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{-48t^2+48t-9}}{4t}\right)^2\\&=\frac{\pi}{24}\left\{48-\left(48t+\frac{9}{t}\right)\right\}\end{aligned}$$

であるが，相加平均と相乗平均の関係式より

$$48t+\frac{9}{t}\geqq 2\sqrt{48t\cdot\frac{9}{t}}=24\sqrt{3}.$$

等号成立は $48t=\frac{9}{t}$，すなわち $t=\frac{\sqrt{3}}{4}$ のときで，これは $\frac{1}{4}<t<\frac{3}{4}$ の範囲に含まれている．以上より，求める最大値は

$$\frac{\pi}{24}\left(48-24\sqrt{3}\right)=(2-\sqrt{3})\pi$$

となる．