2025　早稲田大学　社会科学部　数学　解答例

1　以下において，合同式は 10 を法とする．

k を 0 以上の整数，r を 0 から 9 までの整数とすると，n は $10k+r$ で表される．このとき，$(10k+r)^p \equiv r^p$ であるから，$f_p(n)$ は r^p を 10 で割った余りに一致する．

(1)　$f_2(n)$ は r^2 を 10 で割ったときの余りである．

$$0^2 \equiv 0,\quad 1^2 \equiv 1,\quad 2^2 \equiv 4,\quad 3^2 \equiv 9,\quad 4^2 \equiv 6$$
$$5^2 \equiv 5,\quad 6^2 \equiv 6,\quad 7^2 \equiv 9,\quad 8^2 \equiv 4,\quad 9^2 \equiv 1$$

よって，$f_2(n)$ の取りうる値は $\underline{0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9}$ である．

(2)

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n\left(n^4-1\right) \\ &= n\left(n^2+1\right)\left(n^2-1\right) \\ &= (n-1)\,n\,(n+1)\left(n^2-4+5\right) \\ &= (n-1)\,n\,(n+1)\left(n^2-4\right)+5\,(n-1)\,n\,(n+1) \\ &= (n-2)\,(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)+5\,(n-1)\,n\,(n+1) \end{aligned}$$

連続する 5 つの整数の積は 120 の倍数である．また，連続する 3 つの整数の積は 6 の倍数であるから，$5\,(n-1)\,n\,(n+1)$ は 30 の倍数である．

よって，n^5-n は 10 の倍数であるから，$f_5(n)-f_1(n)=\underline{0}$ である．

(3)　(2) より，$n^5 \equiv n$ が成り立つから

$$n^{100} \equiv \left(n^5\right)^{20} \equiv n^{20} \equiv \left(n^5\right)^4 \equiv n^4 \equiv \left(n^2\right)^2 \equiv \left(f_2(n)\right)^2$$

このとき

$$0^2 \equiv 0,\ 1^2 \equiv 1,\ 4^2 \equiv 6,\ 5^2 \equiv 5,\ 6^2 \equiv 6,\ 9^2 \equiv 1$$

であるから，$f_{100}(n)$ の取りうる値は $\underline{0,\ 1,\ 5,\ 6}$ である．

2 (1)　$a_{n+1} = -\dfrac{1}{n+1}$ であるから

$$b_n = -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} = \underline{\frac{1}{n(n+1)}}$$

(2)　$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \underline{2 - \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．

(3)　$n \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} k(k+1) \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k) - 2 \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1+3) \\ &= \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

$a_2 = a_1 + b_1 = 1 + 1 = 2$ であるから，これは $n = 2$ のときも成り立つ．よって

$$a_n = \underline{\begin{cases} 1 & (n = 1) \\ \dfrac{1}{3}(n-1)n(n+1) & (n \geqq 2) \end{cases}}$$

3　(1)

$$\begin{aligned} k^2 &= \sin^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta \\ &= 1 + 2\cos^2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta \\ &= \cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 4\sqrt{3}\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sqrt{3} \\ &= \cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 2\sin\theta - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\cos\theta + 2\sqrt{3} \\ &= \cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 2 - 2 + 2\left(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta\right) \\ &= \underline{k^2 + 2k - 2} \end{aligned}$$

である．

(2)　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ であるから，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 1$

　よって $k = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ より

$$-\sqrt{3} \leqq k \leqq 2$$

である．

　$f(\theta) = (k+1)^2 - 3$ であるから，$f(\theta)$ は $k = 2$ のとき最大値 6，$k = -1$ のとき最小値 -3 をとる．

$$k = 2 \iff 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \iff \theta = \frac{5}{6}\pi$$

$$k = -1 \iff 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \iff \theta = \frac{\pi}{6}$$

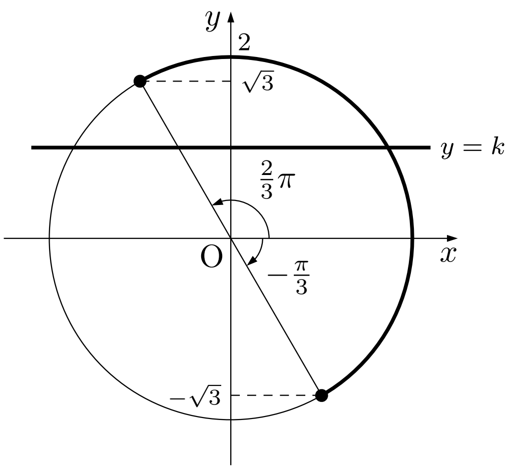
　よって，$f(\theta)$ は $\theta = \underline{\dfrac{5}{6}\pi}$ のとき最大値 $\underline{6}$，$\underline{\dfrac{\pi}{6}}$ のとき最小値 $\underline{-3}$ をとる．

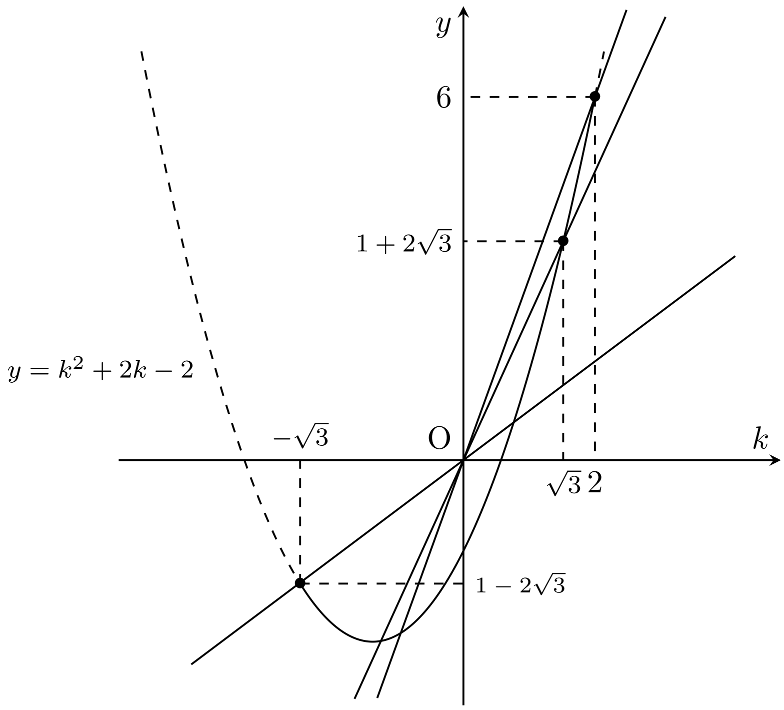
(3)　右図より，1 個の k に対応する θ の個数は

$$\begin{cases} k < -\sqrt{3},\ 2 < k \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ -\sqrt{3} \leqq k < \sqrt{3},\ k = 2 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ \sqrt{3} \leqq k < 2 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \end{cases}$$

である．

　次に，θ の方程式 $f(\theta) = ak$ の解の個数について，放物線 $y = k^2 + 2k - 2$ と直線 $y = ak$ の共有点から考える．





直線 $y = ax$ が点 $\left(-\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3}\right)$ を通るとき $a = \dfrac{6-\sqrt{3}}{3}$ である．また，直線 $y = ax$ が点 $\left(\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3}\right)$ を通るとき $a = \dfrac{6+\sqrt{3}}{3}$ であり，点 $(2,\ 6)$ を通るとき $a = 3$ である．

よって，上図より θ の方程式 $f(\theta) = ak$ の解の個数は

$$\begin{cases} 0 < a < \dfrac{6-\sqrt{3}}{3} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ \dfrac{6-\sqrt{3}}{3} \leqq a < \dfrac{6+\sqrt{3}}{3},\ a = 3 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ \dfrac{6+\sqrt{3}}{3} \leqq a < 3 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$