[1]

(1)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
1	5	2	1	0	1	2	6	1	3	5	1	0

(2)

(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)
1	7	−	1	5	3	3	1	6

[2]

(1)

(23)	(24)	(25)	(26)	(27)
1	1	6	3	8

(2)

(28)	(29)	(30)	(31)	(32)	(33)	(34)
2	2	1	3	0	1	2

(3)

(35)	(36)	(37)	(38)	(39)	(40)	(41)	(42)	(43)	(44)
2	2	0	1	1	1	6	2	1	2

[3]

(1)

(45)	(46)	(47)
3	1	6

(2)

(48)	(49)
3	8

(3)

(50)	(51)	(52)	(53)	(54)
6	3	2	5	6

(4)

(55)	(56)	(57)	(58)	(59)
6	5	3	3	6

[4](1)$y=-x^2$ の点 $(-p,-p^2)$ での接線の方程式は

$$y=2px+p^2$$

であるから,$y=2m$ と連立することで,P_m の x 座標は

$$2px+p^2=2m$$

$p>0$ であるから

$$x=\underline{\frac{2m-p^2}{2p}}$$

(2)N は P_m の x 座標が 1 以下となる自然数 m のうち最大　であるので

$$\frac{2N-p^2}{2p}\leqq 1 \quad かつ \quad \frac{2(N+1)-p^2}{2p}>1$$

が成り立つ。$p>0$ に注意して変形すると

$$2N+1\leqq(p+1)^2<2N+3$$

$N=40$ のとき

$$81\leqq(p+1)^2<83$$

$p+1>0$ より

$$9\leqq p+1<\sqrt{83}$$

$$\underline{8\leqq p<\sqrt{83}-1}$$

(3)$a=3n\log_3 6-\log_3 2+n=(3n-1)\log_3 2+4n$ であるから

$$3^a=\underline{2^{3n-1}\cdot 3^{4n}}$$

(4)(2) より

$$2N+1\leqq(p+1)^2<2N+3$$

が成り立つ。($p\geqq 2$ が成り立つので,N はすべての n について存在する。)
$N<2^{1000}$ であるから

$$(2^{3n-1}\cdot 3^{4n}+1)^2<2^{1001}+3$$

$$(2^{3n-1}\cdot 2^{(4\log_2 3)n}+1)^2<2^{1001}+3$$

よって,n は次の不等式を満たす。

$$2^{2\{(3+4\log_2 3)n-1\}} < 2^{1002}$$

$2>1$ より指数を比べて,$1.58<\log_2 3$ を用いると

$$9.32n-1<501$$

$$n<\frac{502}{9.32}\quad(=53.8\cdots)$$

よって,$n \leqq 53$ である。
また,$n=53$ のとき

$$p+1=2^{(3+4\log_2 3)\times 53-1}+1<2^{9.36\times 53}+1=2^{496.08}+1<2^{498}$$

であるから (2) より

$$2N+1<2^{996}$$

$$N<2^{995}-\frac{1}{2}$$

であるから $N<2^{1000}$ となる。
よって,$n=53$ は条件を満たす。

[5]

(1)xy 平面上では

$$C: x^2+y^2=1, \quad D: (x-4)^2+y^2=4$$

であるから, これらと $y=px+q$ が接するので,

$$\frac{|q|}{\sqrt{p^2+1}}=1 \quad \cdots ①, \quad \frac{|4p+q|}{\sqrt{p^2+1}}=2 \quad \cdots ②$$

① より $q \neq 0$ であるから,

$$\frac{4p+q}{q}=\pm 2$$

$$\frac{4p}{q}=1, -3$$

$$p=\frac{q}{4}, -\frac{3}{4}q$$

① より

$$q^2=p^2+1$$

であるから

(i)$p=\dfrac{q}{4}$ のとき

$$q=\pm\frac{4}{\sqrt{15}}, p=\pm\frac{1}{\sqrt{15}} \quad (複号同順)$$

(ii)$p=-\dfrac{3}{4}q$ のとき

$$q=\pm\frac{4}{\sqrt{7}}, p=\mp\frac{3}{\sqrt{7}} \qquad (複号同順)$$

$0<p<1$ であるから

$$p=\frac{\sqrt{15}}{15}, q=\frac{4}{15}\sqrt{15}$$

(2)(1) 同様に

$$\frac{|s|}{\sqrt{r^2+1}}=1 \quad , \quad \frac{|4r+s|}{\sqrt{r^2+1}}=2$$

となるので $r<-1$ より

$$r=-\frac{3}{7}\sqrt{7}, s=\frac{4}{7}\sqrt{7}$$

(3) zx 平面上で, 直線 $\mathrm{B_1B_2}$ の方程式は $z=-\dfrac{3}{\sqrt{7}}x+\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ であるから

$\left(\dfrac{4}{3},0,0\right)$ を β は通る。

xy 平面上では

$$\beta\text{は}\left(\frac{4}{3},0\right)\text{を通り }y\text{ 軸に垂直な直線：}x=\frac{4}{3}\text{となる。}$$

α は $y=\dfrac{x}{\sqrt{15}}+\dfrac{4}{\sqrt{15}}$ となるので, これらの交点は

$$\mathrm{G}\left(\frac{4}{3},\frac{16}{45}\sqrt{15},0\right)$$

(4)G と同様に H を求めると

$$\mathrm{H}\left(-4,0,\frac{16}{\sqrt{7}}\right)$$

であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\left(-\frac{16}{3},-\frac{16}{3\sqrt{15}},\frac{16}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+t\overrightarrow{\mathrm{GH}}=(a,b,c)$$

とおくと,

$$\triangle\mathrm{OMT}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OM}\cdot\sqrt{b^2+c^2}=\quad 2\cdot\sqrt{b^2+c^2}$$

と表されるので,b^2+c^2 の最小値をとる t の値を求めればよい。

$$(b,c)=\left(\frac{16}{3\sqrt{15}},0\right)+t\left(-\frac{16}{3\sqrt{15}},\frac{16}{\sqrt{7}}\right)$$

であるので

$$\begin{aligned}b^2+c^2=&\frac{16^2}{9\cdot15}(1-t)^2+\frac{16^2}{7}t^2\\=&16\left(\frac{t^2-2t+1}{135}+\frac{1}{7}t^2\right)\\=&16\left(\frac{142}{7\cdot135}t^2-\frac{2}{135}t+\frac{1}{135}\right)\end{aligned}$$

であるので,$\triangle\mathrm{OMT}$ の面積は $t=\dfrac{7}{142}$ で最小となる。

[6](1) 直線 AB の方程式は

$$y=\frac{3(b^2-a^2)}{b-a}(x-a)+3a^2$$

つまり

$$y=3(b+a)x-3ba$$

であるので,

$$\begin{aligned}S&=\int_a^b\{-3x^2+3(b+a)x-3ba\}dt\\&=\left[-x^3+\frac{3}{2}(b+a)x^2-3bax\right]_a^b\\&=-b^3+\frac{3}{2}(b^3+b^2a)-3b^2a\\&\quad+a^3-\frac{3}{2}(ba^2+a^3)+3ba^2\\&=\frac{1}{2}(b^3-3b^2a+3ba^2-a^3)\\&=\frac{(b-a)^3}{2}\end{aligned}$$

(2)$\mathrm{AB}^2=9$ であるので

$$(b-a)^2+(3b^2-3a^2)^2=9$$

$$(b-a)^2\{1+9(b+a)^2\}=9$$

$\{1+9(b+a)^2\}\geqq 1$ であるので

$$(b-a)^2=\frac{9}{\{1+9(b+a)^2\}}\leqq 9$$

等号成立は $b=-a$ のとき　$\left(b=\dfrac{3}{2},a=-\dfrac{3}{2}\text{のとき}\right)$

$$b-a=3$$

$b-a$ が最大のときに,S も最大になるので

$$T=\frac{27}{2}$$

(3) 背理法で示す。

直線 AB が点 $(0,7)$ を通るとすると

$$ba=-\frac{7}{3}$$

であるので

$$(b-a)^2=(b+a)^2-4ba=(b+a)^2+\frac{28}{3}>9$$

となるが (2) より,

$$(b-a)^2 \leqq 9$$

であるから矛盾する。
よって, 直線 AB は点 $(0,7)$ を通らない。