2025 同志社大学（2/4 実施　全学部日程（理系））数学（理系）　解答例

〔I〕

(1)　$\boxed{\text{ア}}\ \dfrac{1}{9}$　$\boxed{\text{イ}}\ \dfrac{23}{45}$　$\boxed{\text{ウ}}\ \dfrac{5}{11}$　$\boxed{\text{エ}}\ \dfrac{14}{33}$　$\boxed{\text{オ}}\ \dfrac{1507}{19683}$

(2)　$\boxed{\text{カ}}\ 230-\sqrt{3}$　$\boxed{\text{キ}}\ 3\sqrt{3}$　$\boxed{\text{ク}}\ 12$　$\boxed{\text{ケ}}\ -\sqrt{3}$　$\boxed{\text{コ}}\ 3\sqrt{13}$

■解説□

(1)　1 回の試行においてさいころの目が 1 または 2 となるという事象を X とする（1 回の試行においてさいころの目が 1，2 以外となるという事象は $\overline{X}$ である）．

$\boxed{\text{ア}}$　求める確率は X が起こりかつ A から白玉を取り出す確率，すなわち $\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{9}$ である．

$\boxed{\text{イ}}$　$\overline{X}$ が起こりかつ B から白玉を取り出す確率は $\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$ である．これと $\boxed{\text{ア}}$ の結果より求める確率は $\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{23}{45}$ となる．

$\boxed{\text{ウ}}$　$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ と同様に考えると，X が起こりかつ赤玉を取り出す確率，$\overline{X}$ が起こりかつ赤玉を取り出す確率はそれぞれ $\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{9}$，$\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{15}$ であるから求める確率は $\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}+\frac{4}{15}}=\dfrac{5}{11}$ となる．

$\boxed{\text{エ}}$　1 回目も 2 回目も X が起こる場合を考える．この場合に赤玉→赤玉の順に取り出す確率，白玉→赤玉の順に取り出す確率をそれぞれ P_{AA}，Q_{AA} とする．これまでと同様に考え，

$$P_{\mathrm{AA}}=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{9}\cdot\frac{12}{30}$$

$$Q_{\mathrm{AA}}=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{30}$$

となる．

以下同様に考え，1 回目も 2 回目も $\overline{X}$ が起こる場合において赤玉→赤玉の順に取り出す確率 P_{BB} および白玉→赤玉の順に取り出す確率 Q_{BB}，1 回目は X，2 回目は $\overline{X}$ が起こる場合において赤玉→赤玉の順に取り出す確率 P_{AB} および白玉→赤玉の順に取り出す確率 Q_{AB}，1 回目は $\overline{X}$，2 回目は X が起こる場合において赤玉→赤玉の順に取り出す確率 P_{BA} および白玉→赤玉の順に取り出す確率 Q_{BA} をそれぞれ求めると，

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{BB}} &= \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{20}\\
Q_{\mathrm{BB}} &= \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{4}=\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{20}\\
P_{\mathrm{AB}} &= \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{30}\\
Q_{\mathrm{AB}} &= \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{30}\\
P_{\mathrm{BA}} &= \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{30}\\
Q_{\mathrm{BA}} &= \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{9}\cdot\frac{12}{30}
\end{aligned}$$

となる．よって求める確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{P_{\mathrm{AA}}+P_{\mathrm{BB}}+P_{\mathrm{AB}}+P_{\mathrm{BA}}}{P_{\mathrm{AA}}+Q_{\mathrm{AA}}+P_{\mathrm{BB}}+Q_{\mathrm{BB}}+P_{\mathrm{AB}}+Q_{\mathrm{AB}}+P_{\mathrm{BA}}+Q_{\mathrm{BA}}}\\
=&\frac{\frac{1}{9}(\frac{12}{30}+4\cdot\frac{2}{20}+2\cdot\frac{8}{30}+2\cdot\frac{8}{30})}{\frac{1}{9}\{\frac{12}{30}+\frac{8}{30}+4(\frac{2}{20}+\frac{6}{20})+2(\frac{8}{30}+\frac{4}{30})+2(\frac{8}{30}+\frac{12}{30})\}}\\
=&\frac{12+12+16+16}{12+8+12+36+16+8+16+24}=\frac{14}{33}
\end{aligned}$$

となる．

$\boxed{\text{オ}}$　$n+5$ 回の試行において X，$\overline{X}$ がそれぞれ 5 回，n 回起こり，かつ $n+6$ 回目の試行では X が起こる確率を p_n とすると（$0 \leqq n \leqq 4$），求める確率は $\displaystyle\sum_{n=0}^{4} p_n$ である．反復試行の確率公式から，

$$\begin{aligned}
p_n &= {}_{5+n}\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{6}\right)^5\left(\frac{4}{6}\right)^n\cdot\frac{2}{6}\\
&= {}_{5+n}\mathrm{C}_5\cdot 2^n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{6+n}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{4} p_n\\
=&\sum_{n=0}^{4} {}_{5+n}\mathrm{C}_5\cdot 2^n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{6+n}\\
=&{}_5\mathrm{C}_5\cdot 2^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_5\cdot 2^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7+{}_7\mathrm{C}_5\cdot 2^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8+{}_8\mathrm{C}_5\cdot 2^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9+{}_9\mathrm{C}_5\cdot 2^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\\
=&(3^4+12\cdot 3^3+84\cdot 3^2+448\cdot 3+2016)\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\\
=&\frac{4521}{3^{10}}=\frac{1507}{19683}
\end{aligned}$$

である．

(2)　$a=3\sqrt{3}$ とすると $\mathrm{A}(2a,\ a-25,\ a+26)$，$\mathrm{B}(2,\ a+27,\ a-26)$ であり，これより $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2(1-a),\ 52,\ -52)$ である．よって

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 &= 2^2\{(1-a)^2+26^2+26^2\}\\
&= 4(1353-2a+a^2)\\
&= 4(1353-2\cdot 3\sqrt{3}+27)\\
&= 4\cdot 3(451-2\sqrt{3}+9)\\
&= 24(230-\sqrt{3})\cdots①
\end{aligned}$$

である．

　H は直線 AB 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表せる（k は実数）．さらに $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ なので，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=0$$

となり，

$$\begin{aligned}
k &= -\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2}\\
&= -\frac{(2a,\ a-25,\ a+26)\cdot(2(1-a),\ 52,\ -52)}{24(230-\sqrt{3})} \qquad (\text{①より})\\
&= -\frac{4a(1-a)+52(a-25)-52(a+26)}{24(230-\sqrt{3})}\\
&= -\frac{12\sqrt{3}-4\cdot27-52\cdot25-52\cdot26}{24(230-\sqrt{3})}\\
&= \frac{12(230-\sqrt{3})}{24(230-\sqrt{3})}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

である．よって $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となり，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\
&= (2a,\ a-25,\ a+26)+\frac{1}{2}(2(1-a),\ 52,\ -52)\\
&= (1+a,\ 1+a,\ a)\\
&= (1+3\sqrt{3},\ 1+3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})
\end{aligned}$$

であり，H の z 座標は $3\sqrt{3}$ である．

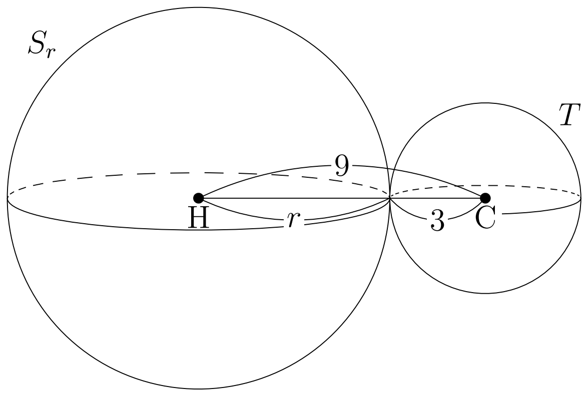
　S_r と T が 1 点のみを共有するための条件は S_r と T の位置関係が次図の 2 つの場合のいずれかになることであり，r が最大であるのは後者の場合である．よって最大値 r_0 は CH と T の半径の和，すなわち $9+3=12$ である．

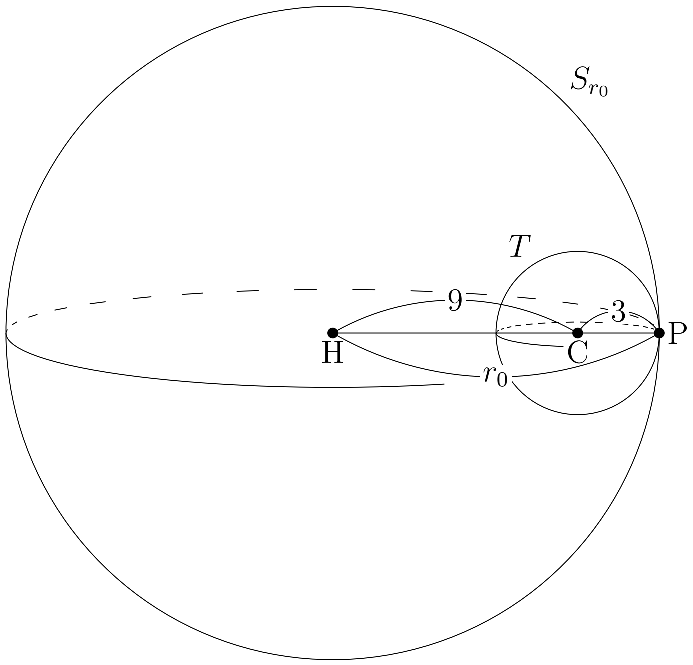
　すると P は HC を $(12:3=)4:1$ に外分する点であり，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{4\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{4-1}\\
&= \frac{4(1,\ 1,\ 0)-(1+a,\ 1+a,\ a)}{3}\\
&= \left(1-\frac{a}{3},\ 1-\frac{a}{3},\ -\frac{a}{3}\right)\\
&= (1-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3},\ -\sqrt{3})
\end{aligned}$$

となり P の z 座標は $-\sqrt{3}$ である．

以上より S_{r_0} の方程式は $\left(x-1-3\sqrt{3}\right)^2+\left(y-1-3\sqrt{3}\right)^2+\left(z-3\sqrt{3}\right)^2=12^2\cdots$ ② となり，これと xy 平面，すなわち平面 $z=0$ との交わりの円の方程式は ② で $z=0$ として得られる式 $\left(x-1-3\sqrt{3}\right)^2+\left(y-1-3\sqrt{3}\right)^2=\left(3\sqrt{13}\right)^2$ かつ $z=0$ であり，よって求める半径は $3\sqrt{13}$ となる．





〔 Ⅱ 〕　$a_1=1,\ a_2=1$

$a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)}a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ……⊛

$b_n=a_{n+1}+\dfrac{9-n}{n+1}a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ……㊯

(1)　⊛ で $n=1$ として　$a_3=a_2+\dfrac{10\cdot 8}{3\cdot 2}a_1=1+\dfrac{40}{3}=\dfrac{43}{3}$

㊯ で $n=1$ として　$b_1=a_2+\dfrac{8}{2}a_1=1+4=5$

㊯ で $n=2$ として　$b_2=a_3+\dfrac{7}{3}a_2=\dfrac{43}{3}+\dfrac{7}{3}=\dfrac{50}{3}$

(2)　㊯ で n を $n+1$ として

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}&=a_{n+2}+\frac{8-n}{n+2}a_{n+1}\\
&=a_{n+1}+\frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)}a_n+\frac{8-n}{n+2}a_{n+1}\quad(\because\ ⊛)\\
&=\frac{10}{n+2}a_{n+1}+\frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)}a_n\\
&=\frac{10}{n+2}\left(a_{n+1}+\frac{9-n}{n+1}a_n\right)\\
&=\frac{10}{n+2}b_n\quad(\because\ ㊯)
\end{aligned}
$$

$b_{n+1}=c_nb_n$ を満たす c_n は　$c_n=\dfrac{10}{n+2}$

(3)　(2) より　$b_{n+1}=\dfrac{10}{n+2}b_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

両辺に $(n+2)!$ をかけて

$$(n+2)!\cdot b_{n+1}=10\cdot(n+1)!\cdot b_n$$

数列 $\{(n+1)!\cdot b_n\}$ は第 1 項が $2!\cdot b_1=2\cdot 5=10$，公比が 10 の等比数列であるから

$$(n+1)!\cdot b_n=10^n$$

よって　$b_n=\dfrac{10^n}{(n+1)!}$　……①

(4)　⊛ より　$a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)}a_n$

$\dfrac{10}{(n+2)(n+1)}a_n>0$ であるから

$9-n>0$ つまり $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 8$ ならば　$a_{n+2}-a_{n+1}>0$　すなわち　$a_{n+1}<a_{n+2}$

$9-n=0$ つまり $n=9$ ならば　$a_{n+2}-a_{n+1}=0$　すなわち　$a_{n+1}=a_{n+2}$

$9-n<0$ つまり $n=10,\ 11,\ 12,\ \cdots$ ならば　$a_{n+2}-a_{n+1}<0$　すなわち　$a_{n+1}>a_{n+2}$

このことから

$$a_1=a_2<a_3<\cdots<a_9<a_{10}=a_{11}>a_{12}>a_{13}>\cdots$$

よって，すべての自然数 n について $a_n\leqq a_{m_0}$ が成り立つような自然数 m_0 は

$$m_0=10,\ 11$$

㊢ で $n=10$ として $b_{10}=a_{11}-\dfrac{1}{11}a_{10}$

① と $a_{10}=a_{11}=a_{m_0}$ であることから

$$\frac{10^{10}}{11!}=a_{m_0}-\frac{1}{11}a_{m_0}$$
$$=\frac{10}{11}a_{m_0}$$

ゆえに $(10!)\cdot a_{m_0}=10^9$

よって，求める組は $\left(m_0,\ (10!)\cdot a_{m_0}\right)=(10,\ 10^9),\ (11,\ 10^9)$

〔III〕

■ 解答例 □

(1) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であることから，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-u^2}$

これと，半角の公式および三角関数の和と積の関係式を用いて $f(x)$ を変形すると，

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin^2 x+\cos^2(x+\alpha)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos(2x+2\alpha)}{2}\\ &=1+\frac{\cos(2x+2\alpha)-\cos 2x}{2}=1+\frac{-2\sin(2x+\alpha)\sin\alpha}{2}\\ &=1-u\sin(2x+\alpha)\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

であることから，

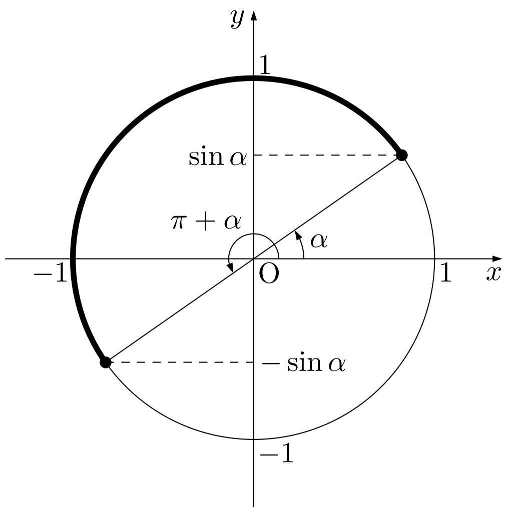
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{1-u\sin(2x+\alpha)\}\,dx=\left[x+\frac{u\cos(2x+\alpha)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &=\frac{\pi}{2}+\frac{u\{\cos(\pi+\alpha)-\cos\alpha\}}{2}=\frac{\pi}{2}-u\cos\alpha\\ &=\frac{\pi}{2}-u\sqrt{1-u^2}\end{aligned}$$

(2) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$0<\alpha\leqq 2x+\alpha\leqq\pi+\alpha<\frac{3}{2}\pi$$

であることから，右図より，

$$\begin{aligned}&-\sin\alpha\leqq\sin(2x+\alpha)\leqq 1\\ &1-u\leqq 1-u\sin(2x+\alpha)\leqq 1+u^2\\ &1-u\leqq f(x)\leqq 1+u^2\end{aligned}$$



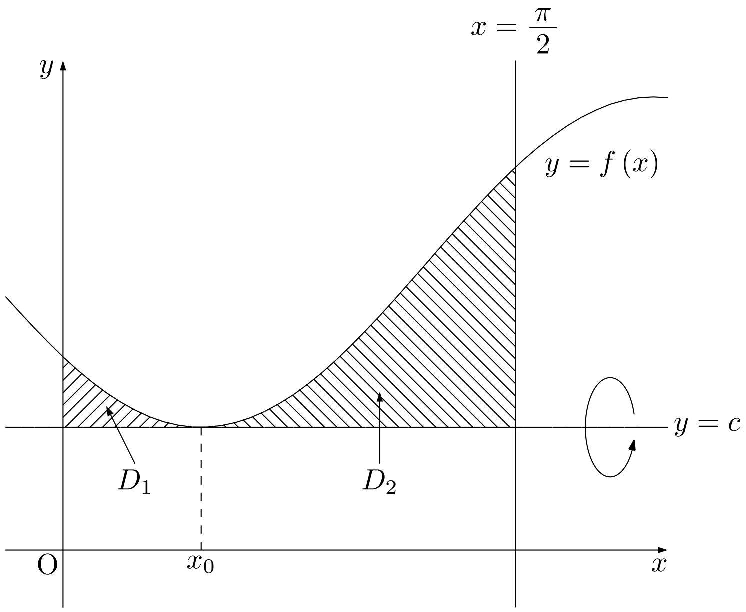
これより，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x)$ は，

$2x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $x=\dfrac{\pi-2\alpha}{4}$ のとき

最小値 $1-u$ をとる．

以上より，$x_0=\dfrac{\pi-2\alpha}{4}$，$c=1-u$

(3) 曲線 $y=f(x)$ $\left(0\leqq x\leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と 3 つの直線 $y=c$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ で囲まれた 2 つの部分 D_1, D_2 は下図の通り.



ここで, ① 式と (2) の結果より,

$$f(x)-c=\{1-u\sin(2x+\alpha)\}-(1-u)=u\{1-\sin(2x+\alpha)\}$$

であることから,

$$\begin{aligned}
\frac{V_1+V_2}{\pi u^2}&=\frac{1}{\pi u^2}\left[\pi\int_0^{x_0}\{f(x)-c\}^2\,dx+\pi\int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)-c\}^2\,dx\right]\\
&=\frac{1}{u^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^2\{1-\sin(2x+\alpha)\}^2\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\sin^2(2x+\alpha)-2\sin(2x+\alpha)+1\right\}dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1-\cos(4x+2\alpha)}{2}-2\sin(2x+\alpha)+1\right\}dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{3}{2}-\frac{\cos(4x+2\alpha)}{2}-2\sin(2x+\alpha)\right\}dx\\
&=\left[\frac{3}{2}x-\frac{\sin(4x+2\alpha)}{8}+\cos(2x+\alpha)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{3}{4}\pi-\frac{\sin(2\pi+2\alpha)-\sin 2\alpha}{8}+\cos(\pi+\alpha)-\cos\alpha\\
&=\frac{3}{4}\pi-2\cos\alpha=\underline{\frac{3}{4}\pi-2\sqrt{1-u^2}}
\end{aligned}$$

〔IV〕

解答

$$\begin{cases} f_n(x) = x\dfrac{d}{dx}f_{n-1}(x) \quad (n=1,2,3,\cdots) & \cdots[1] \\ \displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-s^2}ds = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} & \cdots[2] \end{cases}$$

(1)　$h(t) = \left(1+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{t^k}{k!}\right)e^{-t}$ に対して,$m \geqq 2$ のとき

$$\frac{d}{dt}h(t) = \left(1+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\right)e^{-t} + \left(1+\sum_{k=1}^{m}\frac{t^k}{k!}\right)(-e^{-t}) = -\frac{t^m e^{-t}}{m!}$$

であり, これは $m=1$ のときにも成り立つ．よって,

$$\frac{d}{dt}h(t) = -\frac{t^m e^{-t}}{m!} \quad \cdots[3]$$

(2)　$z=t^2$ とすると,0 以上の実数 z に対して,

$$\frac{z^m}{m!} < e^z$$

を示せばよい.

[3] より,0 以上の実数 z に対して,$\dfrac{d}{dz}h(z) \leqq 0$ なので,

$$h(z) \leqq h(0) = 1$$

また,

$$\frac{z^m}{m!}e^{-z} < \left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^m}{m!}\right)e^{-z} = h(z)$$

であるので,

$$\frac{z^m}{m!}e^{-z} < 1$$

$$\frac{z^m}{m!} < e^z$$

よって, 実数 t に対して, 不等式

$$\frac{t^{2m}}{m!} < e^{t^2}$$

が成り立つ.

(3)　$\ell_n(u) = g_n(e^u) = f_n(e^u)(e^u)^{\log e^u} = f_n(e^u)(e^u)^u = f_n(e^u)e^{u^2}(\cdots[4])$ であるから,

$$\ell_0(u) = f_0(e^u)e^{u^2} = (e^u)^{-\log e^u}\cdot e^{u^2} = e^{-u^2}\cdot e^{u^2} = e^0 = 1 \quad \cdots[5]$$

$$\begin{aligned} \ell_1(u) &= f_1(e^u)e^{u^2} = e^u\cdot\frac{d}{d(e^u)}f_0(e^u)\cdot e^{u^2} \quad ([1] \text{ より}) \\ &= e^u\cdot\frac{d}{du}f_0(e^u)\cdot\frac{du}{d(e^u)}\cdot e^{u^2} = e^u\cdot\frac{d}{du}(e^{-u^2})\cdot\frac{1}{\frac{d(e^u)}{du}}\cdot e^{u^2} \quad ([5] \text{ より}) \\ &= e^u\cdot(-2u)e^{-u^2}\cdot\frac{1}{e^u}\cdot e^{u^2} = -2u \end{aligned}$$

が成り立つ.

次に, すべての自然数 n に対して

「$\ell_n(u)$ は u の n 次式である」$\cdots[*]$

ことを数学的帰納法で証明する.

(i)　$n=1$ のとき,$\ell_1(u)=-2u$ より, $[*]$ が成り立つ.

(ii)　$n=k$ のとき,$[*]$ の成立を仮定すると,$\ell_k(u)$ は u の k 次式であり,

$$\ell_k(u)=p_k u^k+q_{k-1}u^{k-1}+q_{k-2}u^{k-2}+\cdots+q_1 u+q_0 \quad (p_k\neq 0)$$

と表せて, これと [4] より

$$p_k u^k+q_{k-1}u^{k-1}+q_{k-2}u^{k-2}+\cdots+q_1 u+q_0=f_k(e^u)e^{u^2}$$

すなわち

$$f_k(e^u)=e^{-u^2}(p_k u^k+q_{k-1}u^{k-1}+q_{k-2}u^{k-2}+\cdots+q_1 u+q_0) \quad \cdots[6]$$

と表せる.

ここで,

$$\begin{aligned}\ell_{k+1}(u)&=f_{k+1}(e^u)e^{u^2}=e^u\cdot\frac{d}{d(e^u)}f_k(e^u)\cdot e^{u^2}=e^u\cdot\frac{d}{du}f_k(e^u)\cdot\frac{du}{d(e^u)}\cdot e^{u^2}\\&=e^u\cdot\frac{d}{du}\{e^{-u^2}(p_k u^k+q_{k-1}u^{k-1}+q_{k-2}u^{k-2}+\cdots+q_1 u+q_0)\}\cdot\frac{1}{e^u}\cdot e^{u^2}\cdots[7] \ (\text{[6] より})\\&=\{(-2u)e^{-u^2}(p_k u^k+q_{k-1}u^{k-1}+\cdots+q_1 u+q_0)+e^{-u^2}(kp_k u^{k-1}+\cdots+q_1)\}e^{u^2}\\&=-2p_k u^{k+1}-2q_{k-1}u^k+\cdots+q_1 \quad (-2p_k\neq 0)\end{aligned}$$

となるので, これは u の $k+1$ 次式である.

以上 (i),(ii) より, すべての自然数 n で $[*]$ が成り立つ.

以上の考察より,$\ell_n(u)$ の u^n の項の係数を $p_n(n=1,2,3,\cdots)$ とすると,

$$\begin{cases}p_1=-2\\p_{n+1}=-2p_n \quad (n=1,2,3,\cdots)\end{cases}$$

という関係が成り立ち, これより

$$p_n=(-2)\cdot(-2)^{n-1}=\underline{(-2)^n}$$

が成り立つ.

(4)　まずは, 正の数 b に対して,$J_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{b}}^{b}\{f_n(x)\}^2 x^{\log x-1}dx=\int_{\frac{1}{b}}^{b}\{f_n(x)\}^2\frac{x^{\log x}}{x}dx$ と定める. これを $\log x=s$, すなわち,$x=e^s$ と置き換え, さらに,$\log b=B$(すなわち $b=e^B$) となる B を定めると,

$$J_n=\int_{-B}^{B}\{f_n(e^s)\}^2\frac{(e^s)^{\log e^s}}{e^s}\frac{dx}{ds}ds=\int_{-B}^{B}\{f_n(e^s)\}^2\frac{e^{s^2}}{e^s}e^s ds=\int_{-B}^{B}\{f_n(e^s)\}^2 e^{s^2}ds$$

となる.

これを用いて

$$\begin{aligned}J_0&=\int_{-B}^{B}\{f_0(e^s)\}^2 e^{s^2}ds=\int_{-B}^{B}\{e^{-s^2}\ell_0(s)\}^2 e^{s^2}ds \quad (\text{[4] を用いた})\\&=\int_{-B}^{B}e^{-s^2}ds=2\int_0^B e^{-s^2}ds \quad (e^{-s^2}\text{ は偶関数より})\end{aligned}$$

となるから,[2] より,

$$I_0=\lim_{b\to\infty}J_0=\lim_{B\to\infty}\left(2\int_0^B e^{-s^2}ds\right)=2\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\underline{\sqrt{\pi}}$$

が成り立つ.

次に,I_1 について考える.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-B}^{B} \{f_1(e^s)\}^2 e^{s^2} ds = \int_{-B}^{B} \{e^{-s^2}\ell_1(s)\}^2 e^{s^2} ds \\
&= \int_{-B}^{B} (-2s)^2 e^{-s^2} ds = 2\int_{0}^{B} 4s^2 e^{-s^2} ds \quad (s^2e^{-s^2}\text{は偶関数より}) \\
&= -4\int_{0}^{B} s(-2s)e^{-s^2} ds = -4\left(\left[se^{-s^2}\right]_0^B - \int_0^B e^{-s^2} ds\right) \quad (\text{部分積分法を用いた}) \\
&= -4B\cdot e^{-B^2} + 4\int_0^B e^{-s^2} ds \quad \cdots[8]
\end{aligned}
$$

であり, ここで,(2) の結果に $(m,t)=(1,B)$ を代入すると,$B^2 < e^{B^2}$ であり,

$$(0<)B\cdot e^{-B^2} < \frac{1}{B}$$

が成り立つ.

$\displaystyle\lim_{B\to\infty}\frac{1}{B} = 0$ であることに注意すると,

$$\lim_{B\to\infty}\left(B\cdot e^{-B^2}\right) = 0$$

とわかる.

これと [2],[8] をあわせて考えると,

$$I_1 = \lim_{b\to\infty} J_1 = \lim_{B\to\infty}\left(-4B\cdot e^{-B^2} + 4\int_0^B e^{-s^2} ds\right) = -4\cdot 0 + 4\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2\sqrt{\pi}$$

が成り立つ.

(5)　[7] より,0 以上の整数 n に対して,

$$\ell_{n+1}(u)e^{-u^2} = \frac{d}{du}\{\ell_n(u)e^{-u^2}\}$$

であり,

$$\ell_n(u)e^{-u^2} = \frac{d}{du}\{\ell_{n-1}(u)e^{-u^2}\} = \cdots = \frac{d^n}{du^n}\{\ell_0(u)e^{-u^2}\} = \frac{d^n}{du^n}(e^{-u^2}) \quad ([5]\text{ より})$$

また,(3) の結果から,$n \geqq 1$ において,

$$\frac{d^n}{du^n}\ell_n(u) = (-2)^n\cdot n!$$

が成り立つ. さらに,

$$\frac{d^0}{du^0}\ell_n(u) = \ell_n(u)$$

とする.

よって,$n \geqq 2$ のとき, これらのことを利用して,(4) と同じように考えると,

$$
\begin{aligned}
J_n &= \int_{-B}^{B} \{f_n(e^s)\}^2 e^{s^2} ds = \int_{-B}^{B} \{\ell_n(s)\}^2 e^{-s^2} ds = \int_{-B}^{B} \ell_n(s)\ell_n(s)e^{-s^2} ds \\
&= \left[\ell_n(s)\ell_{n-1}(s)e^{-s^2}\right]_{-B}^{B} - \int_{-B}^{B} \frac{d}{ds}\ell_n(s)\cdot\ell_{n-1}(s)e^{-s^2} ds \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}\ell_n(s)\cdot\ell_{n-k-1}(s)e^{-s^2}\right]_{-B}^{B} + (-1)^n\int_{-B}^{B}\frac{d^n}{ds^n}\ell_n(s)\cdot e^{-s^2} ds \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}\ell_n(s)\cdot\ell_{n-k-1}(s)e^{-s^2}\right]_{-B}^{B} + 2^n\cdot n!\int_{-B}^{B} e^{-s^2} ds \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}\ell_n(s)\cdot\ell_{n-k-1}(s)e^{-s^2}\right]_{-B}^{B} + 2^{n+1}\cdot n!\int_{0}^{B} e^{-s^2} ds \quad \cdots[9]
\end{aligned}
$$

ここで,0 以上 $n-1$ 以下の整数 k に対して,$\dfrac{d^k}{ds^k}\ell_n(s)$ は s の $n-k$ 次式,$\ell_{n-k-1}(s)$ は s の $n-k-1$ 次式なので,$\dfrac{d^k}{ds^k}\ell_n(s)\cdot\ell_{n-k-1}(s)$ は s の $2n-2k-1$ 次式である.

よって,

$$\frac{d^k}{ds^k}\ell_n(s)\cdot\ell_{n-k-1}(s) = c_{2n-2k-1}s^{2n-2k-1} + c_{2n-2k-2}s^{2n-2k-2} + \cdots + c_1 s + c_0$$

と表せるので,

$$\frac{d^k}{ds^k}\ell_n(s)\cdot\ell_{n-k-1}(s)e^{-s^2} = (c_{2n-2k-1}s^{2n-2k-1} + c_{2n-2k-2}s^{2n-2k-2} + \cdots + c_1 s + c_0)e^{-s^2}$$

これより,

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^k}{ds^k}\ell_n(s)\cdot\ell_{n-k-1}(s)e^{-s^2}\right]_{-B}^{B} &= (c_{2n-2k-1}B^{2n-2k-1} + c_{2n-2k-2}B^{2n-2k-2} + \cdots + c_1 B + c_0)e^{-B^2}\\ &\quad - \{c_{2n-2k-1}(-B)^{2n-2k-1} + c_{2n-2k-2}(-B)^{2n-2k-2} + \cdots + c_1(-B) + c_0\}e^{-B^2}\\ &= 2(c_{2n-2k-1}B^{2n-2k-1} + c_{2n-2k-3}B^{2n-2k-3} + \cdots + c_1 B)e^{-B^2}\end{aligned}$$

ここで,i を 1 以上 $n-k$ 以下の整数として,(2) の結果に $(m,t)=(i,B)$ を代入すると,

$$0 < \frac{B^{2i}}{i!} < e^{B^2}$$
$$0 < B^{2i-1}e^{-B^2} < \frac{i!}{B}$$

が成り立つ.

$\displaystyle\lim_{B\to\infty}\frac{i!}{B} = 0$ であることに注意すると,

$$\lim_{B\to\infty}\left(B^{2i-1}e^{-B^2}\right) = 0$$

とわかる.

よって,

$$\lim_{B\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left[(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}\ell_n(s)\cdot\ell_{n-k-1}(s)e^{-s^2}\right]_{-B}^{B} = 0$$

これと [2],[9] をあわせて考えると,

$$\begin{aligned}I_n = \lim_{b\to\infty}J_n &= \lim_{B\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left[(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}\ell_n(s)\cdot\ell_{n-k-1}(s)e^{-s^2}\right]_{-B}^{B} + 2^{n+1}\cdot n!\int_0^B e^{-s^2}ds\right\}\\ &= 0 + 2^{n+1}\cdot n!\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2^n\cdot n!\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

これに $n=0,1$ を代入すると,

$$2^0\cdot 0!\cdot\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} = I_0$$
$$2^1\cdot 1!\cdot\sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi} = I_1$$

より,$n=0,1$ でも成り立つ.

よって,

$$I_n = \underline{2^n\cdot n!\sqrt{\pi}}$$