〔I〕

(1)　$\boxed{ア}$ p^{4n}　$\boxed{イ}$ $1-p^n$　$\boxed{ウ}$ $\dfrac{65}{256}$　$\boxed{エ}$ $p(1-p^3)$　$\boxed{オ}$ $\dfrac{27}{64}$

(2)　$\boxed{カ}$ -1　$\boxed{キ}$ 5　$\boxed{ク}$ -5　$\boxed{ケ}$ $\sqrt{5}$　$\boxed{コ}$ $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

■解説□

(1) $\boxed{ア}$　$q_n(4)$ は，すべての硬貨について n 回の試行でずっと表が出る確率であり，

$$\begin{aligned} q_n(4) &= (p^n)^4 \\ &= p^{4n} \end{aligned}$$

である．

$\boxed{イ}$　$q_n(0)$ は，すべての硬貨について「n 回の試行で少なくとも 1 回裏が出る」$\cdots$①ことが起こる確率である．①が起こる確率は $1-p^n$ だから，$q_n(0)=\{1-p^n\}^4$ である．

$\boxed{ウ}$　1 回目の試行を終えた時点で硬貨 A が k 枚だけ残る確率を P_k とすると（$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$），P_k は 1 回の試行において 4 枚中 k 枚表が出てかつ $4-k$ 枚裏が出る確率であり，これは反復試行の確率公式から $P_k={}_4\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{4-k}$ となる．

1 回目の試行を終えた時点で硬貨 A が k 枚だけ残っているとき，その k 枚の硬貨が 2 回目に硬貨 B になる，すなわちその k 枚の硬貨を投げた結果すべてが裏となる確率は $(1-p)^k$ である（$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$）．

求める確率は，$p=\dfrac{1}{2}$ であることもふまえ，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4} P_k\times(1-p)^k &= \sum_{k=1}^{4} {}_4\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{4-k}\times(1-p)^k \\ &= (1-p)^4\left(\sum_{k=0}^{4} {}_4\mathrm{C}_k p^k - {}_4\mathrm{C}_0 p^0\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)^4\left\{\sum_{k=0}^{4} {}_4\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k-1\right\} \\ &= \frac{1}{16}\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)^4-1\right\}=\frac{65}{256} \end{aligned}$$

となる．

$\boxed{エ}$　$q_3(1)$ は,「1 枚の硬貨について 3 回の試行でずっと表が出る」$\cdots$②ことが起こり，かつ「残りの 3 枚の硬貨については 3 回の試行で少なくとも 1 回裏が出る」$\cdots$③確率である．

②が起こる確率は p^3 である．1 枚の硬貨について 3 回の試行で少なくとも 1 回裏が出る確率は $1-p^3$ だから，③が起こる確率は $(1-p^3)^3$ である．3 回の試行でずっと表が出る 1 枚の硬貨の選び方が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りだけあることもふまえ，

$$\begin{aligned} q_3(1) &= {}_4\mathrm{C}_1 p^3\{(1-p^3)\}^3 \\ &= 4\times\{p(1-p^3)\}^3 \end{aligned}$$

となる．

$\boxed{\text{オ}}$　$x = p^3$ とおくと $0 < p < 1$ より x のとりうる値の範囲は $0 < x < 1$ であり，$q_3(1) = 4x(1-x)^3$（$= f(x)$ とする）となる．

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(1-x)^3 - 4x \cdot 3(1-x)^2 \\ &= 4(1-x)^2(1-4x) \end{aligned}$$

であるから，$0 < x < 1$ における $f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{27}{64}$	$\searrow$	

増減表より $q_3(1)$ の最大値は $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{64}$ となる．

(2)　方程式 $z^5 = 1 \cdots ④$ を $z \neq 1$ の下で解くと，

$$z^5 - 1 = 0$$

$$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

となることから w は $w^4 + w^3 + w^2 + w + 1 = 0$ を満たし，よって $w + w^2 + w^3 + w^4 = -1 \cdots ⑤$ である．また w は ④ の解なのだから $w^5 = 1 \cdots ⑥$ も成り立つ．

⑥ より $(w,\ w^2,\ w^3,\ w^4) = \left(\frac{1}{w^4},\ \frac{1}{w^3},\ \frac{1}{w^2},\ \frac{1}{w}\right) \cdots ⑥'$ であるから，

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \left\{\left(w + w^4\right) - \left(w^2 + w^3\right)\right\}^2 \\ &= \left\{\left(w + \frac{1}{w}\right) - \left(w^2 + \frac{1}{w^2}\right)\right\}^2 \\ &= \left(w + \frac{1}{w}\right)^2 + \left(w^2 + \frac{1}{w^2}\right)^2 - 2\left(w + \frac{1}{w}\right)\left(w^2 + \frac{1}{w^2}\right) \\ &= w^2 + \frac{1}{w^2} + 2 + w^4 + \frac{1}{w^4} + 2 - 2\left(w^3 + \frac{1}{w} + w + \frac{1}{w^3}\right) \\ &= w^2 + w^3 + w^4 + w + 4 - 2\left(w^3 + w^4 + w + w^2\right) \qquad (⑥' \text{より}) \\ &= -1 + 4 - 2(-1) \qquad (⑤ \text{より}) \\ &= 5 \end{aligned}$$

である．同様にして，

$$\begin{aligned}
\beta^2+2\alpha &= \left\{\left(w-w^4\right)+\left(w^2-w^3\right)\right\}^2+2\left\{\left(w+w^4\right)-\left(w^2+w^3\right)\right\} \\
&= \left\{\left(w-\frac{1}{w}\right)+\left(w^2-\frac{1}{w^2}\right)\right\}^2+2\left(w-w^2-w^3+w^4\right) \\
&= \left(w-\frac{1}{w}\right)^2+\left(w^2-\frac{1}{w^2}\right)^2+2\left(w-\frac{1}{w}\right)\left(w^2-\frac{1}{w^2}\right)+2\left(w-w^2-w^3+w^4\right) \\
&= w^2+\frac{1}{w^2}-2+w^4+\frac{1}{w^4}-2+2\left(w^3-\frac{1}{w}-w+\frac{1}{w^3}\right)+2\left(w-w^2-w^3+w^4\right) \\
&= w^2+w^3+w^4+w-4+2\left(w^3-w^4-w+w^2\right)+2\left(w-w^2-w^3+w^4\right) \\
&= -1-4=-5
\end{aligned}$$

である．

⑥ より $|w|^5=1$ であり，これより $|w|=1$ である．よって，

$$|w|^2=1$$

$$w\overline{w}=1$$

$$\overline{w}=\frac{1}{w}\cdots ⑦$$

である．また $|w|=1$ かつ $w\neq 1$ より $w=\cos\theta+i\sin\theta$（$0<\theta<2\pi$）とおけて，これと ⑥ より，

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^5=1$$

$$\cos 5\theta+i\sin 5\theta=1$$

であり，今，$0<5\theta<10\pi$ だから上式を満たす θ の値は $5\theta=2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ 8\pi$，すなわち $\theta=\frac{2}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{8}{5}\pi$ である．

$\theta=\frac{2}{5}\pi$ の場合を考えると $w=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$，$w^2\left(=\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)^2\right)=\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi$ であり，

$$\begin{aligned}
w+w^4 &= w+\frac{1}{w} && (⑥'\text{より}) \\
&= w+\overline{w} && (⑦\text{より}) \\
&= \left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)+\left(\cos\frac{2}{5}\pi-i\sin\frac{2}{5}\pi\right) \\
&= 2\cos\frac{2}{5}\pi \\
w^2+w^3 &= w^2+\frac{1}{w^2} && (⑥'\text{より}) \\
&= w^2+\overline{w}^2 && (⑦\text{より})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= w^2+\overline{w^2} \\
&= \left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right)+\left(\cos\frac{4}{5}\pi-i\sin\frac{4}{5}\pi\right) \\
&= 2\cos\frac{4}{5}\pi
\end{aligned}
$$

であり，これらを辺々引くことにより $(w+w^4)-(w^2+w^3)=2\cos\frac{2}{5}\pi-2\cos\frac{4}{5}\pi$，すなわち $2\cos\frac{2}{5}\pi-2\cos\frac{4}{5}\pi=\alpha$ を得る．よって，$\frac{2}{5}\pi$，$\frac{4}{5}\pi$ がそれぞれ鋭角，鈍角ゆえ $2\cos\frac{2}{5}\pi-2\cos\frac{4}{5}\pi>0$ であることと $\boxed{キ}$ の結果から $2\cos\frac{2}{5}\pi-2\cos\frac{4}{5}\pi(=\alpha)=\sqrt{5}$ である．すると $\boxed{ク}$ の結果から，

$$\beta^2+2\sqrt{5}=-5$$

$$\beta^2=-\left(5+2\sqrt{5}\right)\quad\cdots⑧$$

となる．

余弦の計算のときと同様にして

$$
\begin{aligned}
w-w^4 &= \left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)-\left(\cos\frac{2}{5}\pi-i\sin\frac{2}{5}\pi\right) \\
&= 2i\sin\frac{2}{5}\pi \\
w^2-w^3 &= \left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right)-\left(\cos\frac{4}{5}\pi-i\sin\frac{4}{5}\pi\right) \\
&= 2i\sin\frac{4}{5}\pi
\end{aligned}
$$

より $(w-w^4)+(w^2-w^3)=i\left(2\sin\frac{2}{5}\pi+2\sin\frac{4}{5}\pi\right)$，すなわち $2\sin\frac{2}{5}\pi+2\sin\frac{4}{5}\pi=\frac{\beta}{i}$ を得る．よって，⑧ および $2\cos\frac{2}{5}\pi-2\cos\frac{4}{5}\pi$ のときと同様の理由で $2\sin\frac{2}{5}\pi+2\sin\frac{4}{5}\pi>0$ が成り立つこともふまえ，

$$
\begin{aligned}
2\sin\frac{2}{5}\pi+2\sin\frac{4}{5}\pi &= \frac{\sqrt{-\left(5+2\sqrt{5}\right)}}{i} \\
&= \frac{i\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{i} \\
&= \sqrt{5+2\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

となる．

$\theta=\frac{4}{5}\pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{8}{5}\pi$ としても同様の結果が得られる．

〔II〕

解答　$f(x)=2\sqrt{x-1}\,(x \geqq 1)$ とおくと,$x>1$ で $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ が成り立つ.

(1)　ℓ の方程式は $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ であり, これを計算すると,$y=\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}x+\dfrac{a-2}{\sqrt{a-1}}$ となる. よって,

$$m=\underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}},\quad n=\underset{\sim\sim}{a-2}$$

(2)　直線 **AH** は, 点 $\mathbf{A}(1,0)$ を通り, 傾き $-\sqrt{a-1}$ の直線である (ℓ と直交するから). よって, 直線 **AH** の方程式は,$y-0=-\sqrt{a-1}(x-1)$, すなわち,$y=-\sqrt{a-1}x+\sqrt{a-1}$ である.

この方程式と **(1)** で求めた直線 ℓ の方程式を連立させて解くと,$x=\dfrac{1}{a}$, $y=\dfrac{(a-1)\sqrt{a-1}}{a}$ が得られる. よって,**H** の座標は

$$\mathbf{H}\left(\frac{1}{a},\ \frac{(a-1)\sqrt{a-1}}{a}\right)$$

である.

点 **Q** は線分 **AP** 上にあり,**PQ** = **AH** であるから,(**P** と **Q** の x 座標の差) = (**A** と **H** の x 座標の差) と言えて, これより

$$(\mathbf{Q}\text{ の }x\text{ 座標})-0=1-\frac{1}{a}\quad\text{すなわち}\quad(\mathbf{Q}\text{ の }x\text{ 座標})=1-\frac{1}{a}$$

とわかる. 点 **Q** は直線 **AH** 上にあることに注意すると, その y 座標もわかり, 点 **Q** の座標は

$$\mathbf{Q}\left(1-\frac{1}{a},\ \frac{\sqrt{a-1}}{a}\right)$$

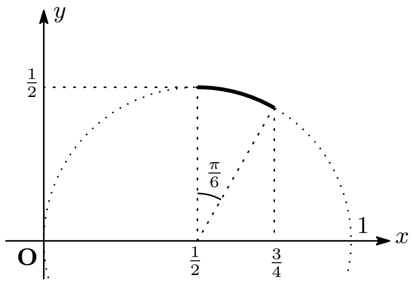
とわかる.

(3)　「2 点間の距離」を求める公式より

$$\mathbf{MQ}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{a-1}}{a}-0\right)^2}=\underset{\sim}{\frac{1}{2}}$$

(4)　**(3)** の結果より, 点 **Q** は, 点 $\mathbf{M}\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上を動く.

$a=2$ のとき点 **Q** の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ であり,$a=4$ のとき点 **Q** の座標は $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ であり, 点 **Q** の x 座標である $1-\dfrac{1}{a}$ は a の単調増加関数であるから, 点 **Q** の軌跡は, 点 **M** を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周の一部分であり (下図の太線部分), 点 **Q** の軌跡である円弧の両端は点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ と点 $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ である.



点 **Q** の軌跡である円弧に対応する中心角の大きさは $\dfrac{\pi}{6}$ であるから, 点 **Q** の軌跡の長さは

$$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}=\underset{\sim}{\frac{\pi}{12}}$$

である.

〔III〕

■解答例□

(1)

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot 1\cdot dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$$

$$K_0=\frac{J_0}{I_0}=\frac{\pi^3}{24}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{\pi^2}{12}$$

(2)

$$I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\cos^{2n+1}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\cdot\cos^{2n+1}x\,dx$$

$$=\Big[\sin x\cdot\cos^{2n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot(2n+1)\cos^{2n}x\cdot(-\sin x)\,dx$$

$$=(2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{2n}x\,dx=(2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 x\right)\cos^{2n}x\,dx$$

$$=(2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^{2n}x-\cos^{2n+2}x\right)dx$$

$$=(2n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+2}x\,dx\right)=(2n+1)\left(I_n-I_{n+1}\right)$$

よって，$I_{n+1}=(2n+1)\left(I_n-I_{n+1}\right)$ より，

$$(2n+2)\,I_{n+1}=(2n+1)\,I_n$$

$$I_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}I_n$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{2n+1}{2n+2}$$

(3)

$$J_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^{2n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot x^2\cos^{2n+1}x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\cdot x^2\cos^{2n+1}x\,dx$$

$$=\Big[\sin x\cdot x^2\cos^{2n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\left\{2x\cos^{2n+1}x+x^2\cdot(2n+1)\cos^{2n}x\cdot(-\sin x)\right\}dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{2x\sin x\cos^{2n+1}x-(2n+1)\,x^2\sin^2 x\cos^{2n}x\right\}dx$$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(-\frac{1}{2n+2}\cos^{2n+2}x\right)'dx+(2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\left(1-\cos^2 x\right)\cos^{2n}x\,dx$$

$$= -2\left(\left[-\frac{x}{2n+2}\cos^{2n+2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+2}x\,dx\right)$$

$$+ (2n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n}x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n+2}x\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{n+1}I_{n+1} + (2n+1)\left(J_n - J_{n+1}\right)$$

よって，$J_{n+1} = -\dfrac{1}{n+1}I_{n+1} + (2n+1)J_n - (2n+1)J_{n+1}$ より，

$$(2n+2)J_{n+1} = -\frac{1}{n+1}I_{n+1} + (2n+1)J_n$$

$$J_{n+1} = -\frac{1}{2(n+1)^2}I_{n+1} + \frac{2n+1}{2n+2}J_n$$

$$\therefore\quad b_n = -\frac{1}{2(n+1)^2},\quad c_n = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(4) (2)，(3) の結果より，

$$K_{n+1} - K_n = \frac{J_{n+1}}{I_{n+1}} - \frac{J_n}{I_n} = \frac{b_nI_{n+1} + c_nJ_n}{I_{n+1}} - \frac{J_n}{I_n}$$

$$= b_n + \frac{c_nJ_n}{I_{n+1}} - \frac{J_n}{I_n} = b_n + \frac{c_nJ_n}{a_nI_n} - \frac{J_n}{I_n}$$

$$= b_n + \frac{c_n}{a_n}\cdot\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_n}{I_n} = b_n + \frac{J_n}{I_n} - \frac{J_n}{I_n}\quad(\because\quad a_n = c_n)$$

$$= -\frac{1}{2(n+1)^2}$$

(5) (4) の結果より，

$$K_n - K_{n-1} = -\frac{1}{2n^2}$$

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(K_{n-1} - K_n\right)$$

よって，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N}\left\{2\left(K_{n-1} - K_n\right)\right\}$$

$$= 2\left\{(K_0 - \cancel{K_1}) + (\cancel{K_1} - \cancel{K_2}) + (\cancel{K_2} - \cancel{K_3}) + \cdots + (\cancel{K_{N-2}} - \cancel{K_{N-1}}) + (\cancel{K_{N-1}} - K_N)\right\}$$

$$= 2\left(K_0 - K_N\right) = 2K_0 - 2K_N$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}K_n = 0$ であることより，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \lim_{N\to\infty}\left(2K_0 - 2K_N\right) = 2\cdot\frac{\pi^2}{12} - 2\cdot 0 = \frac{\pi^2}{6}$$

〔IV〕

■解答例□

(1) $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ の両辺を x で微分すると，

$$g'(x)=f(x)=\frac{\sin \pi x}{x^2-72x+2025}=\frac{\sin \pi x}{(x-36)^2+27^2}$$

$(x-36)^2+27^2>0$ より，$g'(x)=0$ となる x は，

$\sin \pi x=0$　　すなわち，$x=k$（k は整数）

さらに，m を整数としたとき，

$2m \leqq x \leqq 2m+1$ のとき，　$\sin \pi x \geqq 0$

$2m+1 \leqq x \leqq 2m+2$ のとき，$\sin \pi x \leqq 0$

であることに注意すると，$g(x)$ の増減表は右表の通り．

x	$\cdots$	$2m$	$\cdots$	$2m+1$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

これより，$g(x)$ は，

$x=2m$ のとき極小値をとり，　$(\cdots\cdots①)$

$x=2m+1$ のとき極大値をとる．$(\cdots\cdots②)$

よって，$0<x<10$ において，

$g(x)$ の極小値を与える x は，$x=2,\ 4,\ 6,\ 8$

$g(x)$ の極大値を与える x は，$x=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$

(2) $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$ を繰り返し用いると，

$$\sin(\theta+\pi n)=-\sin\{\theta+\pi(n-1)\}=\cdots=(-1)^n\sin\theta$$

これを用いて考える．

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx=\int_n^{n+1}\frac{\sin \pi x}{(x-36)^2+27^2}\,dx$$

$x-n=s$ とおくと，右表と $\dfrac{dx}{ds}=1$ であることから，

x	n	$\to$	$n+1$
s	0	$\to$	1

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1}\frac{\sin \pi x}{(x-36)^2+27^2}\,dx&=\int_0^1\frac{\sin(\pi s+\pi n)}{(s+n-36)^2+27^2}\frac{dx}{ds}\cdot ds\\&=\int_0^1\frac{(-1)^n\sin \pi s}{(s+n-36)^2+27^2}\,ds\\&=(-1)^n\int_0^1\frac{\sin \pi x}{(x+n-36)^2+27^2}\,dx\quad\cdots\cdots③\end{aligned}$$

次に，

$$\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = \int_{n-1}^{n} \frac{\sin \pi x}{(x-36)^2+27^2}\,dx$$

x	$n-1$	$\to$	n
u	1	$\to$	0

$x-n=-u$ とおくと，右表と $\dfrac{dx}{du}=-1$ であることから，

$$\int_{n-1}^{n} \frac{\sin \pi x}{(x-36)^2+27^2}\,dx = \int_{1}^{0} \frac{\sin(-\pi u+\pi n)}{(-u+n-36)^2+27^2}\,\frac{dx}{du}\cdot du$$

$$= -\int_{1}^{0} \frac{(-1)^n \sin(-\pi u)}{(u-n+36)^2+27^2}\,du$$

$$= (-1)^{n+1}\int_{1}^{0} \frac{-\sin \pi u}{(u-n+36)^2+27^2}\,du$$

$$= (-1)^{n+1}\int_{0}^{1} \frac{\sin \pi x}{(x-n+36)^2+27^2}\,dx \quad \cdots\cdots ④$$

以上 ③，④ 式より，求める正の定数 p，q の組 $(p,\ q)$ の 1 組は，$(p,\ q)=(36,\ 27)$

(3) $i(n)=g(n+1)-g(n-1)$ として，③，④ 式を用いると，

$$i(n) = \int_{0}^{n+1} f(x)\,dx - \int_{0}^{n-1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{n-1}^{n+1} f(x)\,dx = \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx + \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx$$

$$= (-1)^{n+1}\int_{0}^{1} \frac{\sin \pi x}{(x-n+36)^2+27^2}\,dx + (-1)^n\int_{0}^{1} \frac{\sin \pi x}{(x+n-36)^2+27^2}\,dx$$

$$= (-1)^{n+1}\int_{0}^{1} \left\{ \frac{\sin \pi x}{(x-n+36)^2+27^2} - \frac{\sin \pi x}{(x+n-36)^2+27^2} \right\} dx$$

$$= (-1)^{n+1}\int_{0}^{1} \frac{\sin \pi x\{(x+n-36)^2+27^2-(x-n+36)^2-27^2\}}{h(x)}\,dx$$

$$\left(h(x) = \{(x-n+36)^2+27^2\}\{(x+n-36)^2+27^2\} \text{ とおいた} \right)$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot 4(n-36)\int_{0}^{1} \frac{x\sin \pi x}{h(x)}\,dx \quad \cdots\cdots ⑤$$

$h(x)=\{(x-n+36)^2+27^2\}\{(x+n-36)^2+27^2\}>0$ より，$\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x\sin \pi x}{h(x)}\,dx>0$

これより，$g(n-1)=g(n+1)$，すなわち $i(n)=0$ となる整数 n は，

$n-36=0$　　よって，$n=36$

(4) ④ 式より，整数 n の偶奇で場合分けして考える．

(ｉ) $n=2\ell$ のとき

$$i(2\ell)=(-1)^{2\ell+1}\cdot 4(2\ell-36)\int_0^1 \frac{x\sin \pi x}{h(x)}\,dx=8(18-\ell)\int_0^1 \frac{x\sin \pi x}{h(x)}\,dx$$

これより，

- $18-\ell>0$，すなわち $\ell<18$ のとき
  $i(2\ell)=g(2\ell+1)-g(2\ell-1)>0$　　これより，$g(2\ell-1)<g(2\ell+1)$
- $18-\ell=0$，すなわち $\ell=18$ のとき
  $i(36)=g(37)-g(35)=0$　　これより，$g(35)=g(37)$
- $18-\ell<0$，すなわち $\ell>18$ のとき
  $i(2\ell)=g(2\ell+1)-g(2\ell-1)<0$　　これより，$g(2\ell-1)>g(2\ell+1)$

これらと ② より，$0\leqq x\leqq 1000$ において，極大値の大小関係を調べると，

$$g(1)<g(3)<\cdots<g(33)<g(35)=g(37)>g(39)>\cdots>g(999)$$

(ii) $n=2\ell+1$ のとき

$$i(2\ell+1)=(-1)^{2\ell+2}\cdot 4(2\ell-35)\int_0^1 \frac{x\sin \pi x}{h(x)}\,dx=4(2\ell-35)\int_0^1 \frac{x\sin \pi x}{h(x)}\,dx$$

これより，

- $2\ell-35>0$，すなわち $\ell>\dfrac{35}{2}$ のとき
  $i(2\ell+1)=g(2\ell+2)-g(2\ell)>0$　　これより，$g(2\ell)<g(2\ell+2)$
- $2\ell-35<0$，すなわち $\ell<\dfrac{35}{2}$ のとき
  $i(2\ell+1)=g(2\ell+2)-g(2\ell)<0$　　これより，$g(2\ell)>g(2\ell+2)$

これらと ① より，$0\leqq x\leqq 1000$ において，極小値の大小関係を調べると，

$$g(0)>g(2)>\cdots>g(34)>g(36)<g(38)<\cdots<g(1000)$$

以上 (ｉ)，(ii) より，$0\leqq x\leqq 1000$ において，

$g(x)$ の最小値を与える x は，$x=36$

$g(x)$ の最大値を与える x は，$x=35,\ 37$