2025 立命館大学（2/2 実施　全学統一（理系））数学（理系）　解答例

I

解答　$\boxed{ア}$ $x+1$　$\boxed{イ}$ $5-2x$　$\boxed{ウ}$ 1　$\boxed{エ}$ 2　$\boxed{オ}$ $-x^2+11x-12$　$\boxed{カ}$ $24(x^3-6x^2+11x-6)$　$\boxed{キ}$ $\sqrt{6(x^3-6x^2+11x-6)}$
$\boxed{ク}$ $\dfrac{6-\sqrt{3}}{3}$　$\boxed{ケ}$ $\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$

解説

$\boxed{ア}$　問題より,$\mathbf{BC}=\mathbf{AB}+1=\underline{x+1}$

$\boxed{イ}$　問題より,$\mathbf{AB}+\mathbf{BC}+\mathbf{CA}=6$ だから,$\mathbf{CA}=6-x-(x+1)=\underline{5-2x}$

$\boxed{ウ}$〜$\boxed{エ}$　三角形の成立条件より,$|\mathbf{BC}-\mathbf{AB}|<\mathbf{CA}<\mathbf{BC}+\mathbf{AB}$, すなわち,$1<5-2x<2x+1$ であり, この不等式を解いて,x の取りうる値の範囲は $\underline{1<x<2}$ である.

$\boxed{オ}$　余弦定理より

$$\mathbf{AB}\cdot\mathbf{BC}\cos\mathbf{B}=x(x+1)\cdot\frac{x^2+(x+1)^2-(5-2x)^2}{2x(x+1)}=\frac{x^2+(x+1)^2-(5-2x)^2}{2}=\underline{-x^2+11x-12}$$

$\boxed{カ}$

$$\begin{aligned}\mathbf{AB}^2\cdot\mathbf{BC}^2\sin^2\mathbf{B}&=\mathbf{AB}^2\cdot\mathbf{BC}^2(1-\cos^2\mathbf{B})=\mathbf{AB}^2\cdot\mathbf{BC}^2-(\mathbf{AB}\cdot\mathbf{BC}\cos\mathbf{B})^2\\&=x^2(x+1)^2-(-x^2+11x-12)^2=\underline{24(x^3-6x^2+11x-6)}\end{aligned}$$

$\boxed{キ}$　$\triangle\mathbf{ABC}$ の面積を S とすると,

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathbf{AB}\cdot\mathbf{BC}\sin\mathbf{B}=\frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{AB}^2\cdot\mathbf{BC}^2\sin^2\mathbf{B}}=\frac{1}{2}\sqrt{24(x^3-6x^2+11x-6)}\quad(\boxed{カ}\text{の結果より})\\&=\underline{\sqrt{6(x^3-6x^2+11x-6)}}\end{aligned}$$

$\boxed{ク}$〜$\boxed{ケ}$　$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ とおくと,$1<x<2$ において,

$$f'(x)=3x^2-12x+11=3\left(x-\frac{6-\sqrt{3}}{3}\right)\underbrace{\left(x-\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right)}_{負}\quad\left(1<\frac{6-\sqrt{3}}{3}<2<\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right)$$

であり, この符号は $x-\dfrac{6-\sqrt{3}}{3}$ の符号と逆になる. よって,$f(x)$ の増減は以下のようになる.

x	(1)	$\cdots$	$\frac{6-\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(2)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

この増減表より,$S(=\sqrt{6f(x)})$ の最大値を与える x の値は $x=\underline{\dfrac{6-\sqrt{3}}{3}}$$(=\alpha$とおく$)$ であり, 最大値は

$$\begin{aligned}\sqrt{6f(\alpha)}&=\sqrt{6\alpha^3-36\alpha^2+66\alpha-36}=\sqrt{(3\alpha^2-12\alpha+11)(2\alpha-4)-4\alpha+8}\\&=\sqrt{-4\alpha+8}\quad(3\alpha^2-12\alpha+11=0\text{ より})\\&=\sqrt{-4\cdot\frac{6-\sqrt{3}}{3}+8}=\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}=\underline{\frac{2}{\sqrt[4]{3}}}\end{aligned}$$

である.

II

〔1〕 $\boxed{\text{ア}}$ 0　$\boxed{\text{イ}}$ -19　$\boxed{\text{ウ}}$ 2　$\boxed{\text{エ}}$ -19

〔2〕 $\boxed{\text{オ}}$ 27　$\boxed{\text{カ}}$ 10

〔3〕 $\boxed{\text{キ}}$ $-\dfrac{\log(\log a)}{\log a}$　$\boxed{\text{ク}}$ $e < a$

〔4〕 $\boxed{\text{ケ}}$ 23

■ 解説 □

〔1〕 $f(x) = e^x - x - 20$ について，

$$f'(x) = e^x - 1$$

$f'(x) = 0$ となる x は，$e^x = 1$，すなわち $x = 0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-19	$\nearrow$

$f(x)$ の増減表は右表の通りであるので，$f(x)$ は $x = \underline{0}_{\text{ア}}$ のとき最小値 $\underline{-19}_{\text{イ}}$ をとる．

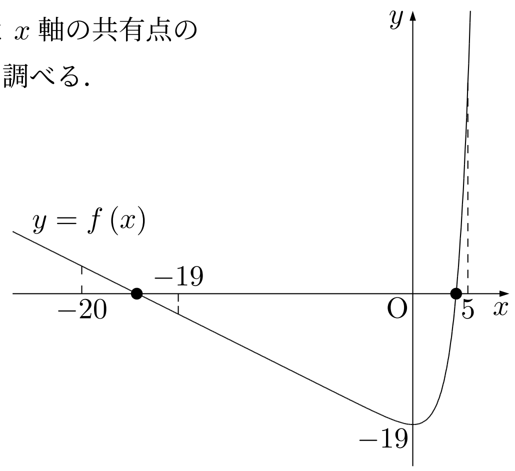
次に， 方程式 $f(x) = 0$ の解の個数は，$y = f(x)$ と x 軸の共有点の個数と同じであるので，$y = f(x)$ のグラフについて調べる．

$$f(-20) = e^{-20} + 20 - 20 = e^{-20} > 0$$

であり，$e > 2.718 > 2$ であることから，

$$f(5) = e^5 - 5 - 20 > 2^5 - 25 = 7 > 0$$

また，$f(x)$ の増減表より，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになるので，方程式 $f(x) = 0$ の解の個数は $\underline{2}_{\text{ウ}}$ 個である．



さらに，e^x は常に単調増加であることから，$x < 0$ において，$e^x < e^0 = 1$

これより，

$$f(-19) = e^{-19} + 19 - 20 = e^{-19} - 1 < 0$$

であることから，$f(x) < 0$ を満たす整数 x の中で最小のものは $\underline{-19}_{\text{エ}}$ である．

〔2〕

$$\frac{27}{10} = 2.7 < 2.718 < e < 2.719 < 2.8 = \frac{28}{10}$$

であるので，$\dfrac{n}{10} < e < \dfrac{n+1}{10}$ を満たす自然数 n は，$n = \underline{27}_{\text{オ}}$ である．

また，

$$\frac{10}{4} = 2.5 < 2.718 < e < 2.719 < 2.75 = \frac{11}{4}$$

であるので，$\dfrac{n}{4} < e < \dfrac{n+1}{4}$ を満たす自然数 n は，$n = \underline{10}_{\text{カ}}$ である．

〔3〕$a>1$ において，$g(x)=a^x-x-20$ について，

$$g'(x)=a^x\log a-1$$

$g'(x)=0$ となる x は，$a>1$ より $\log a>0$ であるので，

$$a^x\log a=1$$

$$a^x=\frac{1}{\log a}$$

両辺に底が a の対数をとると，

$$x=\log_a\frac{1}{\log a}=-\log_a(\log a)=-\frac{\log(\log a)}{\log a}$$

x	$\cdots$	$-\dfrac{\log(\log a)}{\log a}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	最小	↗

$g(x)$ の増減表は右上表の通りであるので，$g(x)$ は $x=\underbrace{-\dfrac{\log(\log a)}{\log a}}_{キ}$ のとき最小値をとる．

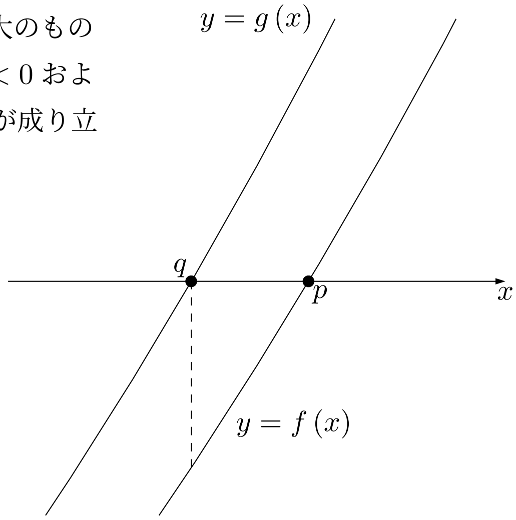
また，方程式 $f(x)=0$，$g(x)=0$ を満たす x で最大のものをそれぞれ p，q とすると，$a>1$ と，$g(0)=-19<0$ および $g(x)$ の増減より，$q>0$ である．よって，$q<p$ が成り立つための必要十分条件は，$f(x)$，$g(x)$ の増減より，

$$f(q)<g(q)=0$$

すなわち，$e^q-q-20<a^q-q-20$

これを整理すると，$e^q<a^q$

以上より，$\underbrace{e<a}_{ク}$



〔4〕〔2〕より，$\dfrac{5}{2}<e<\dfrac{11}{4}$ であるので，

$$f(3)=e^3-3-20$$

$$<\left(\frac{11}{4}\right)^3-23=\frac{1331}{64}-\frac{1472}{64}<0$$

$$f(4)=e^4-4-20>\left(\frac{5}{2}\right)^4-24=\frac{625}{16}-\frac{384}{16}>0$$

であり，$f(x)$ の増減から，$3<p<4$ が成り立つ．

これと〔1〕のグラフを合わせると，$f(x)<0$ を満たす x で整数であるものは，

$x=-19,\ -18,\ \cdots,\ 2,\ 3$　　の合計 $\underbrace{23}_{ケ}$ 個存在する．

III

〔1〕　$\boxed{ア}$ 2　$\boxed{イ}$ 1　$\boxed{ウ}$ 2　$\boxed{エ}$ 5　$\boxed{オ}$ 2

〔2〕　$\boxed{カ}$ $2+\sqrt{5}$　$\boxed{キ}$ $2-\sqrt{5}$　$\boxed{ク}$ $(-1)^n$　$\boxed{ケ}$ $2+\sqrt{5}$　$\boxed{コ}$ $2-\sqrt{5}$

〔3〕　$\boxed{サ}$ $-\dfrac{3}{4}$　$\boxed{シ}$ $\dfrac{1}{4}$

■解説□

> 命題 P
> 　p，q，r，s が有理数，かつ α が無理数のとき，$p+q\alpha=r+s\alpha$ が成り立つならば，$p=r$ かつ $q=s$ である．

　以下，命題 P を証明する．

(証明)

　$p+q\alpha=r+s\alpha\cdots$ ① が成り立つとき $q\neq s$ であると仮定すると，① は $(q-s)\alpha=r-p$，すなわち $\alpha=\dfrac{r-p}{q-s}$ となるがこの式の左辺，右辺はそれぞれ無理数，有理数であり不合理が生じた．よって $q=s$ であり，すると ① は $p+q\alpha=r+q\alpha$，すなわち $p=r$ となる．

〔1〕　$a_n+\sqrt{5}b_n=\left(2+\sqrt{5}\right)^n\cdots$ ② とする．

　② の両辺で $n=1$ として $a_1+\sqrt{5}b_1=2+\sqrt{5}$ を得る．今，a_1，b_1 は有理数なので命題 P により $a_1=2$，$b_1=1$ となる．

　② より

$$a_{n+1}+\sqrt{5}b_{n+1}=\left(2+\sqrt{5}\right)^{n+1}$$

$$a_{n+1}+\sqrt{5}b_{n+1}=\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)^{n}$$

$$a_{n+1}+\sqrt{5}b_{n+1}=\left(2+\sqrt{5}\right)\left(a_n+\sqrt{5}b_n\right)\cdots ②'$$

$$a_{n+1}+\sqrt{5}b_{n+1}=(2a_n+5b_n)+\sqrt{5}\,(a_n+2b_n)$$

となる．今，a_n，b_n，a_{n+1}，b_{n+1} は有理数なので命題 P により $a_{n+1}=2a_n+5b_n\cdots$ ③，$b_{n+1}=a_n+2b_n\cdots$ ④ となる．

〔2〕　②$'$ より $c_{n+1}=\left(2+\sqrt{5}\right)c_n\cdots$ ⑤ となる．さらに ③，④ から

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\sqrt{5}b_{n+1} &= (2a_n+5b_n)-\sqrt{5}(a_n+2b_n) \\ &= \left(2-\sqrt{5}\right)\left(a_n-\sqrt{5}b_n\right) \end{aligned}$$

が得られ，これより $d_{n+1}=\left(2-\sqrt{5}\right)d_n\cdots$ ⑥ となる．

　⑤ $\times$ ⑥ より，

$$\begin{aligned} c_{n+1}d_{n+1} &= \left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)c_nd_n \\ &= -c_nd_n \end{aligned}$$

となり，これと $c_1\left(=a_1+\sqrt{5}b_1\right)=2+\sqrt{5}$，$d_1\left(=a_1-\sqrt{5}b_1\right)=2-\sqrt{5}$ から得られる $c_1d_1=-1$ より，$\{c_nd_n\}$ は初項 -1，公比 -1 の等比数列であり，$c_nd_n=(-1)^n \cdots$ ⑦ となる．

② より $c_n=\left(2+\sqrt{5}\right)^n$ である．これと ⑦ より，

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{(-1)^n}{c_n} \\ &= \left(\frac{-1}{2+\sqrt{5}}\right)^n \\ &= \left(2-\sqrt{5}\right)^n \end{aligned}$$

となり，$a_n-\sqrt{5}b_n=\left(2-\sqrt{5}\right)^n \cdots$ ⑧ が得られる．(② + ⑧) $\div 2$，(② − ⑧) $\div 2\sqrt{5}$ より，それぞれ $a_n=\dfrac{\left(2+\sqrt{5}\right)^n+\left(2-\sqrt{5}\right)^n}{2}$，$b_n=\dfrac{\left(2+\sqrt{5}\right)^n-\left(2-\sqrt{5}\right)^n}{2\sqrt{5}}$ を得る．

〔3〕　〔2〕の結果から，

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(a_k-\sqrt{5}b_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} d_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(2-\sqrt{5}\right)^k \end{aligned}$$

となり，よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n\left(=\sum_{k=1}^{\infty}\left(2-\sqrt{5}\right)^k\right)$ は初項 $2-\sqrt{5}$，公比 $2-\sqrt{5}$ の無限等比級数である．$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$ より $-1\left(=2-\sqrt{9}\right)<2-\sqrt{5}<\left(2-\sqrt{4}=\right)0$ であるからこの無限等比級数は収束し，その和は

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_n &= \frac{2-\sqrt{5}}{1-(2-\sqrt{5})} \\ &= \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \\ &= \frac{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1} \\ &= -\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる．

〔Ⅳ〕

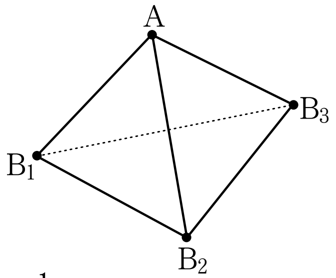
〔1〕　ア 3　イ $\dfrac{2}{9}$　ウ 0　エ $\dfrac{1}{3}$　オ $\dfrac{1}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

〔2〕　カ 4　キ $\dfrac{1}{2}$　ク $\begin{cases} 1 & (n=0) \\ \dfrac{1}{6}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} & (n \geqq 1) \end{cases}$

■解説□

〔1〕　正四面体のある 1 つの頂点について，それと隣接する頂点は $\boxed{\mathbf{3}}_{ア}$ 個 ある．

正四面体のある 1 つの頂点を A，隣接する 3 つの頂点を B_1，B_2，B_3 とし，点 A から出発するとする．



動点が n 回移動した後に点 A にある事象を A_n とする．

$$P(A_0)=1$$

動点が点 A にあるとき，動点は点 A 以外の隣接する頂点 B_1，B_2，B_3 のいずれかに移動するから

$$P_{A_{n-1}}(A_n)=\boxed{\mathbf{0}}_{ウ}\quad (n \geqq 1)$$

動点が点 A 以外 (B_1，B_2，B_3) にあるとき，動点は点 A に確率 $\dfrac{1}{3}$ で移動するから

$$P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n)=\boxed{\mathbf{\dfrac{1}{3}}}_{エ}\quad (n \geqq 1)$$

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1})+P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= P(A_n)\cdot 0+(1-P(A_n))\cdot\frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{3}P(A_n)+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

変形して　$P(A_{n+1})-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}\left\{P(A_n)-\dfrac{1}{4}\right\}$

数列 $\left\{P(A_n)-\dfrac{1}{4}\right\}$ は第 0 項 $P(A_0)-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

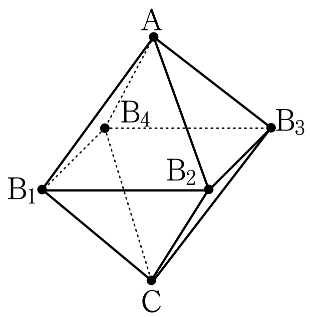
$$P(A_n)-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

よって　$P(A_n)=\boxed{\mathbf{\dfrac{1}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}}_{オ}$

$n=3$ として　$P(A_3)=\dfrac{1}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}=\boxed{\mathbf{\dfrac{2}{9}}}_{イ}$

〔2〕　正八面体のある 1 つの頂点について，それと隣接する頂点は $\boxed{\mathbf{4}}_{カ}$ 個 ある．

正八面体のある 1 つの頂点を A，隣接する 4 つの頂点を B_1，B_2，B_3，B_4，それ以外の頂点を C とし，点 A から出発するとする．



動点が n 回移動した後に

点 A にある事象を A_n

点 B_1, B_2, B_3, B_4 のいずれかにある事象を B_n

点 C にある事象を C_n

とする．

$$P(A_0)=1,\ P(B_0)=0,\ P(C_0)=0$$

動点が点 B_1, B_2, B_3, B_4 のいずれかにあるとき，動点は点 A または点 C に確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動するから

$$P_{B_{n-1}}(\overline{B_n}) = \boxed{\mathbf{\frac{1}{2}}}_{\text{キ}},\ P_{B_{n-1}}(B_n) = \frac{1}{2}\quad (n \geqq 1)$$

動点が点 A または点 C にあるとき，動点は B_1, B_2, B_3, B_4 のいずれかに確率 1 で移動するから

$$P_{\overline{B_{n-1}}}(B_n) = 1\quad (n \geqq 1)$$

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n})P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \\ &= P(B_n)\cdot\frac{1}{2} + (1 - P(B_n))\cdot 1 \\ &= -\frac{1}{2}P(B_n) + 1 \end{aligned}$$

変形して　$P(B_{n+1}) - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{2}\left\{P(B_n) - \dfrac{2}{3}\right\}$

数列 $\left\{P(B_n) - \dfrac{2}{3}\right\}$ は第 0 項 $P(B_0) - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{2}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$P(B_n) - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

よって　$P(B_n) = \dfrac{2}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

動点が B_1, B_2, B_3, B_4 のいずれかにあるとき，動点は点 A に確率 $\dfrac{1}{4}$ で移動するから

$$P_{B_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{4}\quad (n \geqq 1)$$

$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(B_{n-1})P_{B_{n-1}}(A_n) = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

よって，動点が n 回移動した後に出発した頂点にある確率は

$$P(A_n) = \boxed{\begin{cases} \mathbf{1} & (\boldsymbol{n = 0}) \\ \mathbf{\frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}} & (\boldsymbol{n \geqq 1}) \end{cases}}_{\text{ク}}$$