2025 関西大学（2/5 実施　全学日程２）数学(理系)　解答例

〔 I 〕 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}\ (x>0)$，$g(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$

$C_1 : y=f(x)$，$C_2 : y=g(x)$

(1)　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$\log x=1$　　$\therefore x=e$

$f(x)$ の増減を調べると右の表のようになる．

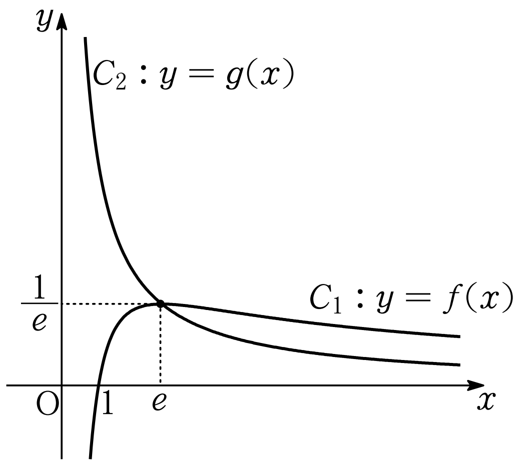
$f(x)$ の最大値は $\dfrac{1}{e}\ (x=e)$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	(0)

(2)　$f(x)=g(x)$ とすると　$\log x=1$　　$\therefore x=e$

C_1 と C_2 の共有点の x 座標を α とするので　$\alpha=e$

C_1 と C_2 の概形は右図．



(3)　直線 $x=s\ (s>e)$ と C_1 と C_2 の交点をそれぞれ P，Q とすると

$$\mathrm{PQ}=f(s)-g(s)=\frac{\log s}{s}-\frac{1}{s}$$
$$=\frac{\log s-1}{s}$$
$$h(s)=\frac{\log s-1}{s}\quad (s>e)$$

とすると

$$h'(s)=\frac{2-\log s}{s^2}$$

$h'(s)=0$ とすると　$\log s=2$　　$\therefore s=e^2$

$h(s)$ の増減は右の表になる．

よって，線分 PQ の長さの最大値は $\dfrac{1}{e^2}\ (s=e^2)$

s	(e)	$\cdots$	e^2	$\cdots$	(∞)
$h'(s)$		$+$	0	$-$	
$h(s)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\searrow$	

(4)　C_1，C_2 および直線 $x=t\ (t>0)$ で囲まれる図形の面積を S とすると

$0<t\leqq e$ のとき　$S=\displaystyle\int_t^e\{g(x)-f(x)\}\,dx=\int_e^t\{f(x)-g(x)\}\,dx$

$e<t$ のとき　$S=\displaystyle\int_e^t\{f(x)-g(x)\}\,dx$

いずれの場合も　$S=\displaystyle\int_e^t\{f(x)-g(x)\}\,dx$

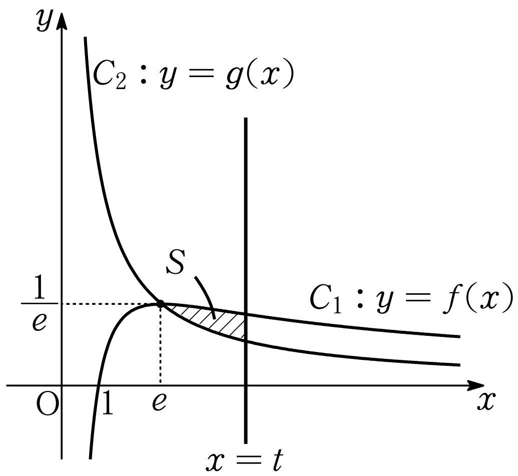
$$S=\int_e^t\frac{\log x-1}{x}\,dx=\left[\frac{(\log x-1)^2}{2}\right]_e^t$$
$$=\frac{(\log t-1)^2}{2}$$

$S=2$ とすると　$(\log t-1)^2=4$

$\log t-1=\pm 2$

$\therefore \log t=-1,\ 3$

よって　$t=\dfrac{1}{e},\ e^3$



代々木ゼミナール

〔II〕

(1) $\boxed{①}$ $3^{m-1}(3n-2)$ $\boxed{②}$ 5 $\boxed{③}$ 81

(2) $\boxed{④}$ $3^{\ell-1}$ $\boxed{⑤}$ $\dfrac{3^{\ell}-1}{2}$

(3) $\boxed{⑥}$ $\dfrac{1}{3^{\ell}}$ $\boxed{⑦}$ $1-\dfrac{2}{3^{\ell+1}-1}$ $\left(=\dfrac{3^{\ell+1}-3}{3^{\ell+1}-1}\right)$

■ 解説 □

(1) 規則 (A) より，1 行目かつ n 列目の数は,

$$1+(n-1)\cdot 3=3n-2$$

と表される.

次に，規則 (B) より，n 列目の数は，初項 $3n-2$，公比 3 の等比数列となる.

以上より，m 行目かつ n 列目の数は,

$$(3n-2)\cdot 3^{m-1}=\underbrace{3^{m-1}(3n-2)}_{①}$$

と表される．次に，19521 について,

$$19521=3^4\cdot 241=3^{5-1}\cdot(3\cdot 81-2)$$

であることから，19521 は $\underbrace{5}_{②}$ 行目かつ $\underbrace{81}_{③}$ 列目の数である.

(2) 以下，n_i を自然数とする．$(i=1,2,3,\cdots)$

1 行目かつ n_1 列目の数 $3n_1-2$ が 3^{ℓ} より小さくなる条件は，$3n_1-2<3^{\ell}$

これを解くと，$n_1<3^{\ell-1}+\dfrac{2}{3}$

n_1 は自然数であることから，1 行目の数の中で 3^{ℓ} より小さいものの個数は,

$n_1=1,\ 2,\ \cdots,\ 3^{\ell-1}$ の $\underbrace{3^{\ell-1}}_{④}$ 個である.

同様にして，i 行目かつ n_i 列目の数 $3^{i-1}(3n_i-2)$ について，i の値で場合分けして考えると,

- $i\geqq \ell+1$ のとき

  $3^{i-1}\geqq 3^{\ell}$，$3n_i-2\geqq 1$ であるので，$3^{i-1}(3n_i-2)<3^{\ell}$ を満たす自然数 n_i は存在しない.

- $1\leqq i\leqq \ell$ のとき

  $3^{i-1}(3n_i-2)$ が 3^{ℓ} より小さくなる条件は，$3^{i-1}(3n_i-2)<3^{\ell}$

  これを解くと，$n_i<3^{\ell-i}+\dfrac{2}{3}$

  n_i は自然数であることから，i 行目の数の中で 3^{ℓ} より小さいものの個数は,

  $n_i=1,\ 2,\ \cdots,\ 3^{\ell-i}$ の $3^{\ell-i}$ 個である.

これらを用いると，3^{ℓ} より小さいものの総数 a_{ℓ} は,

$$a_{\ell}=\sum_{i=1}^{\ell}3^{\ell-i}=\sum_{j=1}^{\ell}3^{j-1}\quad(\ell+1-i=j\ \text{とおいた})$$

$$=\frac{3^{\ell}-1}{3-1}=\underbrace{\frac{3^{\ell}-1}{2}}_{⑤}$$

(3) (2) を用いると，

$$\frac{1}{a_\ell a_{\ell+1}}=\frac{1}{a_{\ell+1}-a_\ell}\cdot\frac{a_{\ell+1}-a_\ell}{a_\ell a_{\ell+1}}=\frac{2}{\left(3^{\ell+1}-1\right)-\left(3^\ell-1\right)}\left(\frac{1}{a_\ell}-\frac{1}{a_{\ell+1}}\right)$$

$$=\frac{2}{2\cdot 3^\ell}\left(\frac{1}{a_\ell}-\frac{1}{a_{\ell+1}}\right)=\underset{⑥}{\frac{1}{3^\ell}}\left(\frac{1}{a_\ell}-\frac{1}{a_{\ell+1}}\right)$$

これより，$\dfrac{3^\ell}{a_\ell a_{\ell+1}}=\dfrac{1}{a_\ell}-\dfrac{1}{a_{\ell+1}}$ であることから，

$$\sum_{k=1}^{\ell}\frac{3^k}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{\ell}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{a_1}-\cancel{\frac{1}{a_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{a_2}}-\cancel{\frac{1}{a_3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{a_\ell}}-\frac{1}{a_{\ell+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{\ell+1}}=\underset{⑦}{1-\frac{2}{3^{\ell+1}-1}}\quad\left(=\frac{3^{\ell+1}-3}{3^{\ell+1}-1}\right)$$

〔III〕

■ 解答例 □

(1) $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=4,\ \left|\vec{c}\right|=5$ であることより，

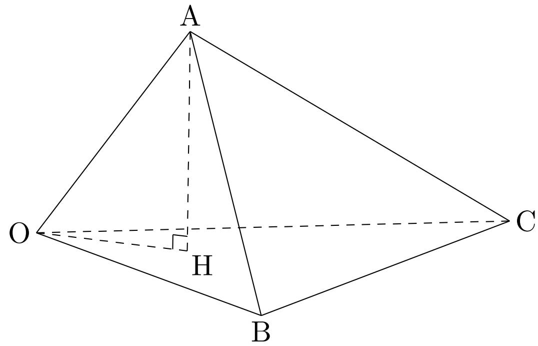
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 60^\circ=3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=6$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos 60^\circ=4\cdot5\cdot\frac{1}{2}=10$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\left|\vec{c}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 60^\circ=5\cdot3\cdot\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{b}+q\vec{c}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=p\vec{b}+q\vec{c}-\vec{a}$$



ここで，$\mathrm{AH}\perp$ (平面 OBC) であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$
$$(p\vec{b}+q\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$$
$$p\left|\vec{b}\right|^2+q\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

整理して，$8p+5q=3$ ……①

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$$
$$(p\vec{b}+q\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{c}=0$$
$$p\vec{b}\cdot\vec{c}+q\left|\vec{c}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

整理して，$4p+10q=3$ ……②

①，② 式を連立して解くと，$p=\frac{1}{4},\ q=\frac{1}{5}$

(3) (2) より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$ であるので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}\right|^2=\frac{1}{16}\left|\vec{b}\right|^2+\frac{1}{10}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{25}\left|\vec{c}\right|^2=1+1+1=3$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|>0$ であるので，$\mathrm{OH}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\sqrt{3}$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|^2+\frac{1}{5}\vec{b}\cdot\vec{c}=4+2=6$$

であることから，

$$\cos\angle\mathrm{BOH}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}=\frac{6}{\sqrt{3}\cdot4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) より，点 H は $\triangle$OBC の内部にあるので，$0^\circ < \angle\mathrm{BOH} < 60^\circ$ である．
これより，$\angle\mathrm{BOH} = 30^\circ$ であるので，

$$\angle\mathrm{COH} = \angle\mathrm{BOC} - \angle\mathrm{BOH} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

以上より，$\angle\mathrm{BOH} = \angle\mathrm{COH} = 30^\circ$ が成り立つことが示された．

(証明了)

(4) (3) より，直線 OM は $\angle$BOC の二等分線なので，

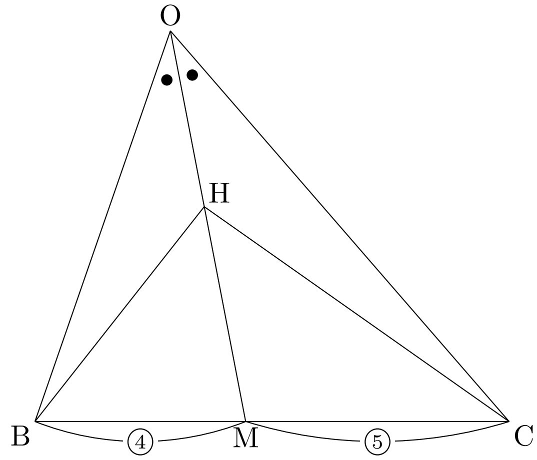
$$\mathrm{BM} : \mathrm{MC} = \mathrm{OB} : \mathrm{OC} = 4 : 5$$

であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{5}{9}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}$$

また，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} \\ &= \frac{9}{20} \cdot \left(\frac{5}{9}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}\right) \\ &= \frac{9}{20}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\end{aligned}$$



以上より，$\mathrm{OH} : \mathrm{OM} = 9 : 20$

次に，$\triangle$OBC の面積は，

$$\frac{1}{2} \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

であり，$\triangle$OBC と $\triangle$HBC の面積比は，辺 BC を共有していることに注意すると，

$$\triangle\mathrm{OBC} : \triangle\mathrm{HBC} = \mathrm{OM} : \mathrm{HM} = 20 : 11$$

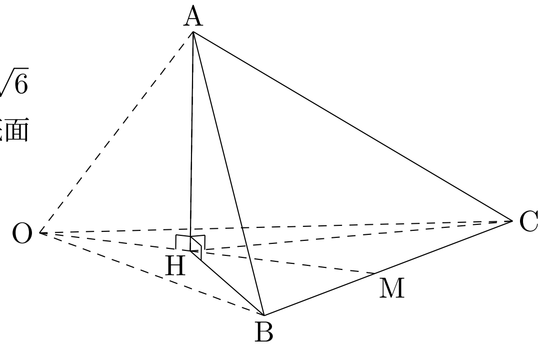
これより，$\triangle\mathrm{HBC} = \dfrac{11}{20}\triangle\mathrm{OBC} = \dfrac{11\sqrt{3}}{4}$

さらに，(3) より $\mathrm{OH} = \sqrt{3}$ であるので，直角三角形 OAH に注目すると，

$$\mathrm{AH} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OH}^2} = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$$

以上より，四面体 ABCH の体積 V は，$\triangle$HBC を底面として考えて，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle\mathrm{HBC} \cdot \mathrm{AH} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{11\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6} = \frac{11\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$



［Ⅳ］

(1)	①	$(3,\ -1)$	②	$\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$	(2)	③	4	④	$-\dfrac{4}{5}$
(3)	⑤	12	⑥	$-\dfrac{1}{64}$	(4)	⑦	0	⑧	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

■ 解説 □

(1)　$x^2+y^2-6ax+2ay+20a-10=0$ を a について整理すると,

$$(-6x+2y+20)a+x^2+y^2-10=0$$

この等式が a の値に関わらず成り立つための条件は,

$$-6x+2y+20=0 \text{ かつ } x^2+y^2-10=0$$

であり, これを解くと

$$x^2+(3x-10)^2-10=0$$
$$10x^2-60x+90=0$$
$$10(x-3)^2=0$$
$$x=3$$
$$\therefore\quad x=3,\ y=-1$$

よって, 求める座標は,

$$(3,\ -1)$$

また, $x^2+y^2-6ax+2ay+20a-10=0$ より,

$$(x-3a)^2+(y+a)^2=10(a-1)^2$$

となるから, 円 $x^2+y^2-6ax+2ay+20a-10=0$ の中心の座標は $(3a,\ -a)$, 半径は $\sqrt{10}\,|a-1|$ とわかり, この円が円 $x^2+y^2=5$ と外接する条件は,

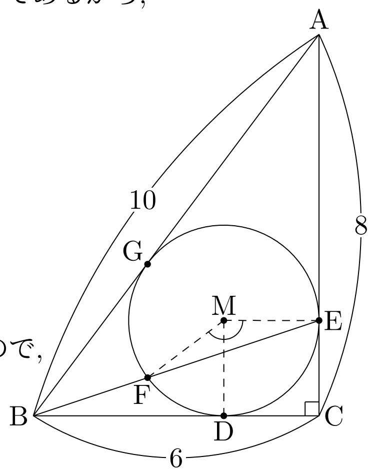
$$\sqrt{(3a-0)^2+(-a-0)^2}=\sqrt{10}\,|a-1|+\sqrt{5}$$
$$\sqrt{10a^2}=\sqrt{10}\,|a-1|+\sqrt{5}$$
$$\sqrt{2}a=\sqrt{2}\,|a-1|+1\quad(\because\ a>0)$$

$a \geqq 1$ のとき, $\sqrt{2}a=\sqrt{2}(a-1)+1$ となるが, a は存在しない.

$a<1$ のとき, $\sqrt{2}a=-\sqrt{2}(a-1)+1$ より

$$2\sqrt{2}a=\sqrt{2}+1$$
$$a=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

(2)　BD $= x$ とおき, 内接円 O と辺 AB との接点を G とおくと, BG $= x$ であるから,



$$\mathrm{AE} = \mathrm{AG} = 10 - x,\ \mathrm{CE} = \mathrm{CD} = 6 - x$$

よって, AC $=$ AE $+$ CE より,

$$8 = (10 - x) + (6 - x)$$

$$8 = 16 - 2x$$

$$2x = 8$$

$$\underset{\sim\sim\sim}{x = 4}$$

次に, △ABC において三平方の定理の逆から, ∠ACB $= 90^\circ$ であるので,

$$\mathrm{BE} = \sqrt{\mathrm{CE}^2 + \mathrm{BC}^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

よって, 方べきの定理より,

$$\mathrm{BF} \times \mathrm{BE} = \mathrm{BD}^2$$

$$\mathrm{BF} \times 2\sqrt{10} = 16$$

$$\mathrm{BF} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

これより,

$$\mathrm{EF} = \mathrm{BE} - \mathrm{BF} = 2\sqrt{10} - \frac{4\sqrt{10}}{5} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

したがって, ME $=$ MF $=$ MD $=$ CE $= 2$ であるから, △MEF で余弦定理より,

$$\cos\angle\mathrm{EMF} = \frac{2^2 + 2^2 - \left(\dfrac{6\sqrt{10}}{5}\right)^2}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{8 - \dfrac{36\cdot 10}{25}}{8} = \frac{-\dfrac{32}{5}}{8} = \underset{\sim\sim}{-\frac{4}{5}}$$

(3)　$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{3} - i = 2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$ より,

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

よって, ド・モアブルの定理より,

$$z^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\frac{5}{12}n\pi + i\sin\frac{5}{12}n\pi\right)$$

となり, z^n が実数となる自然数 n は $n = 12k$ (k は自然数) であるから, 求める最小の自然数 n は,

$$\underset{\sim\sim\sim}{n = 12}$$

また, このときの z^n は,

$$z^{12} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = \frac{1}{64}\cdot(-1) = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{1}{64}}$$

(4)　$\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと, $x\to\infty$ より $\theta\to 0$ となる.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^4+2}\left(1-\cos\dfrac{2}{x}\right)}{x}
&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sqrt{\dfrac{3}{\theta^4}+2}\,(1-\cos 2\theta)}{\dfrac{1}{\theta}}\\
&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sqrt{\dfrac{3}{\theta^4}+2}\cdot 2\sin^2\theta}{\dfrac{1}{\theta}}\\
&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\dfrac{1}{\theta^2}\sqrt{3+2\theta^4}\cdot 2\sin^2\theta}{\dfrac{1}{\theta}}\\
&=\lim_{\theta\to 0}2\theta\sqrt{3+2\theta^4}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\\
&=2\cdot 0\cdot\sqrt{3+2\cdot 0}\cdot 1^2\\
&=\underset{\sim}{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^4+2}\left(1-\cos\dfrac{2}{x}\right)}{(2x+5)\tan\dfrac{3}{x}}
&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sqrt{\dfrac{3}{\theta^4}+2}\,(1-\cos 2\theta)}{\left(\dfrac{2}{\theta}+5\right)\tan 3\theta}\\
&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sqrt{\dfrac{3}{\theta^4}+2}\cdot 2\sin^2\theta}{\dfrac{2\tan 3\theta}{\theta}+5\tan 3\theta}\\
&=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sqrt{3+2\theta^4}\cdot\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2}{2\cdot\dfrac{\tan 3\theta}{\theta}+5\tan 3\theta}\\
&=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sqrt{3+2\theta^4}\cdot\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2}{6\cdot\dfrac{\tan 3\theta}{3\theta}+5\tan 3\theta}\\
&=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sqrt{3+2\theta^4}\cdot\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2}{6\cdot\dfrac{\sin 3\theta}{3\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos 3\theta}+5\tan 3\theta}\\
&=\frac{2\sqrt{3+2\cdot 0}\cdot 1^2}{6\cdot 1\cdot\dfrac{1}{1}+5\cdot 0}\\
&=\frac{2\sqrt{3}}{6}\\
&=\underset{\sim\sim}{\frac{\sqrt{3}}{3}}
\end{aligned}$$