〔1〕

（1）　$\boxed{ア}$　$\dfrac{3}{55}$

（2）　$\boxed{イ}$　$X^2+2X-8-\dfrac{16}{X}$　　$\boxed{ウ}$　$\dfrac{3}{2}$

（3）　$\boxed{エ}$　$\dfrac{9}{4}$　　$\boxed{オ}$　$\dfrac{3}{4}$　　$\boxed{カ}$　$\dfrac{5}{2}$

（4）　$\boxed{キ}$　$3i$　　$\boxed{ク}$　2

■解説□

（1）　くじはすべて区別できると考える．

11 本のくじから 2 本を引く場合の数は，${}_{11}\mathrm{C}_2=\dfrac{11\cdot 10}{2\cdot 1}$（通り）

このうち，3 本の当たりくじから 2 本を引く場合の数は，${}_{3}\mathrm{C}_2=\dfrac{3\cdot 2}{2\cdot 1}$（通り）

よって，求める確率は，

$$\frac{{}_{3}\mathrm{C}_2}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=\frac{3\cdot 2}{11\cdot 10}=\underbrace{\frac{3}{55}}_{ア}$$

（2）

$$4^x+2^{x+1}-8-16\cdot 2^{-x}=(2^x)^2+2\cdot 2^x-8-16\cdot\frac{1}{2^x}$$
$$=\underbrace{X^2+2X-8-\frac{16}{X}}_{イ}$$

したがって，

$$X^2+2X-8-\frac{16}{X}=0$$
$$\frac{X^3+2X^2-8X-16}{X}=0$$
$$\frac{(X+2)(X+2\sqrt{2})(X-2\sqrt{2})}{X}=0$$

$X=2^x>0$ より，$X=2\sqrt{2}$

よって，$x=\underbrace{\dfrac{3}{2}}_{ウ}$

（3）　両辺に $(x+1)(x-1)^2$ を掛けて整理すると，

$$3x^2-2x+4=(A+B)x^2+(-2A+C)x+A-B+C \quad \cdots\cdots ①$$

「与式が恒等式になる（……②)」ことと，「与式の分母が 0 にならないようなあらゆる x に対して①が成り立つ」ことは同値であるが，与式の分母が 0 にならないような x は無数にあるので，結局①が恒等式であることと②は同値である．よって①の両辺を係数比較すると，

$$\begin{cases} 3=A+B \\ -2=-2A+C \\ 4=A-B+C \end{cases}$$

これを解くと，$A=\underbrace{\dfrac{9}{4}}_{\text{エ}}$，$B=\underbrace{\dfrac{3}{4}}_{\text{オ}}$，$C=\underbrace{\dfrac{5}{2}}_{\text{カ}}$

（4）　点 z は単位円上を動くから，$|z|=1$（……③）

$w=i(2z+3)$ から，

$$z=\frac{w-3i}{2i}$$

これを③に代入すると，

$$\left|\frac{w-3i}{2i}\right|=1$$

$$\frac{|w-3i|}{|2i|}=1$$

$|2i|=2|i|=2$ であるから，

$$|w-3i|=2$$

よって，点 w は点 $\underbrace{3i}_{\text{キ}}$ を中心とする半径 $\underbrace{2}_{\text{ク}}$ の円をえがく．

〔2〕

(1)　$\boxed{\text{ア}}$ $\dfrac{5}{6}$　$\boxed{\text{イ}}$ 307　$\boxed{\text{ウ}}$ 3　$\boxed{\text{エ}}$ $\dfrac{m}{2}$

(2)　$\boxed{\text{オ}}$ $\dfrac{m(m+1)}{4}$

(3)　$\boxed{\text{カ}}$ 90

(4)　$\boxed{\text{キ}}$ $\dfrac{5}{4}$　$\boxed{\text{ク}}$ 22

■解説□

数列の第 n 項を a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とする．

第 m 群は $\underbrace{\dfrac{1}{m+1}, \dfrac{2}{m+1}, \cdots, \dfrac{m}{m+1}}_{m\text{ 個}}$

第 m 群の k 番目は $\dfrac{k}{m+1}$ $(k=1, 2, \cdots, m)$

第 m 群の最後（m 番目）の項 $\dfrac{m}{m+1}$ を第 ℓ_m 項とすると

$$\ell_m = 1+2+\cdots+m = \frac{m(m+1)}{2} \quad \text{すなわち} \quad a_{\ell_m} = a_{\frac{m(m+1)}{2}} = \frac{m}{m+1}$$

(1)　$\ell_5 = \dfrac{5\cdot 6}{2} = 15$

第 15 項は第 5 群の最後の項であるから　$a_{15} = \boxed{\dfrac{5}{6}}_{\text{ア}}$

$a_n = \dfrac{7}{26}$ となる n は $\dfrac{7}{26}$ が第 25 群の 7 番目であることから

$$n = \ell_{24} + 7 = \frac{24\cdot 25}{2} + 7 = \boxed{307}_{\text{イ}}$$

第 m 群に属するすべての項の和を G_m とすると

$$G_6 = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \cdots + \frac{6}{7} = \frac{1+2+\cdots+6}{7} = \frac{1}{7}\cdot\frac{6\cdot 7}{2} = \boxed{3}_{\text{ウ}}$$

$$G_m = \frac{1}{m+1} + \frac{2}{m+1} + \cdots + \frac{m}{m+1} = \frac{1+2+\cdots+m}{m+1}$$

$$= \frac{1}{m+1}\cdot\frac{m\cdot(m+1)}{2} = \boxed{\frac{m}{2}}_{\text{エ}}$$

(2)　初項から第 m 群の最後の項までのすべての項の和を S_m とすると

$$S_m = G_1 + G_2 + \cdots + G_m = \sum_{k=1}^{m} G_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{2} = \boxed{\frac{m(m+1)}{4}}_{\text{オ}}$$

(3)　初項から第 n 項までの数列の和が初めて $2025(=45^2)$ をこえる a_n が第 m 群に属する m は

$$2025 < S_m$$

を満たす最小の自然数 m である．

(2) より　$45^2 < \dfrac{m(m+1)}{4}$　すなわち　$90^2 < m(m+1)$

$m(m+1)$ は m に関して単調増加で　$89\cdot 90 < 90^2 < 90\cdot 91$

よって，求める m は　$m = \boxed{\mathbf{90}}_{カ}$

(4)　第 m 群のうち値が $\dfrac{1}{2}$ 以下の項の和を U_m とすると

$$U_7 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \boxed{\mathbf{\frac{5}{4}}}_{キ}$$

$U_m < 3$ となる m について，m が奇数，偶数の場合で考えると

あ　$m = 2k-1$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき

$$U_{2k-1} = \frac{1}{2k} + \frac{2}{2k} + \cdots + \frac{k}{2k} = \frac{1+2+\cdots+k}{2k} = \frac{1}{2k}\cdot\frac{k(k+1)}{2}$$
$$= \frac{k+1}{4}$$

$U_{2k-1} < 3$ とすると　$\dfrac{k+1}{4} < 3$　すなわち　$k < 11$

$k = 1, 2, \cdots, 10$ であるから　$m = 1, 3, 5, \cdots, 19$

い　$m = 2k$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき

$$U_{2k} = \frac{1}{2k+1} + \frac{2}{2k+1} + \cdots + \frac{k}{2k+1} = \frac{1+2+\cdots+k}{2k+1}$$
$$= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

$U_{2k} < 3$ とすると　$\dfrac{k(k+1)}{2(2k+1)} < 3$　すなわち　$k(k-11) < 6$

$k = 1, 2, \cdots, 11$ であるから　$m = 2, 4, 6, \cdots, 22$

よって，$U_m < 3$ となる m の最大値は $\boxed{\mathbf{22}}_{ク}$

〔3〕

（1）　$\boxed{\text{ア}}$　2　　$\boxed{\text{イ}}$　4　　$\boxed{\text{ウ}}$　8

（2）　$\boxed{\text{エ}}$　$\sin 2x + x$　　$\boxed{\text{オ}}$　$\dfrac{\pi}{3}$　　$\boxed{\text{カ}}$　$\dfrac{\pi}{6}$

（3）　$\boxed{\text{キ}}$　$4\sin x - \dfrac{8}{3}\sin^3 x$ $\left(\text{もしくは}\ \ 2\sin x + \dfrac{2}{3}\sin 3x\right)$　　$\boxed{\text{ク}}$　$\dfrac{4\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$

■解説□

（1）

$$f_2(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{2\sin x\cos x}{\sin x} = \underset{\text{ア}}{\underline{2}}\cos x$$

$$f_3(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x}$$

$$= 3 - 4\sin^2 x = 3 - 4\left(1-\cos^2 x\right) = \underset{\text{イ}}{\underline{4}}\cos^2 x - 1$$

$$f_4(x) = \frac{\sin 4x}{\sin x} = \frac{2\sin 2x\cos 2x}{\sin x} = \frac{4\sin x\cos x\cos 2x}{\sin x}$$

$$= 4\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) = \underset{\text{ウ}}{\underline{8}}\cos^3 x - 4\cos x$$

（2）$f_3(x) = 4\cos^2 x - 1$ より，

$$\int f_3(x)\,dx = \int\left(4\cos^2 x - 1\right)dx = \int\left(4\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} - 1\right)dx$$

$$= \int\left(2\cos 2x + 1\right)dx = \underset{\text{エ}}{\underline{\sin 2x + x}} + C \quad (C\ \text{は積分定数})$$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq 3x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ より，曲線 $C_3 : y = \dfrac{\sin 3x}{\sin x}$ $\left(\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸の交点の x 座標を求めると，

$$\sin 3x = 0$$

$$3x = \pi \qquad \therefore\ x = \frac{\pi}{3}$$

よって，求める交点の座標は，$\left(\underset{\text{オ}}{\underline{\dfrac{\pi}{3}}},\ 0\right)$

次に，$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，常に $\sin x > 0$ であり，$\sin 3x$ は

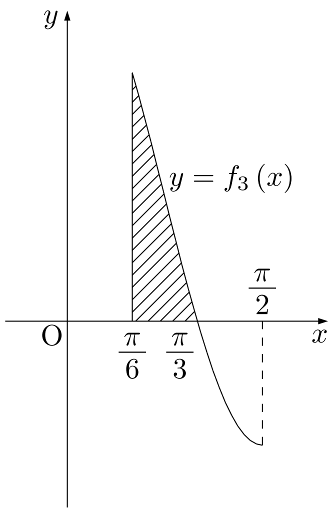
$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\sin 3x \geqq 0$

$\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin 3x \leqq 0$

であるので，曲線 C_3，x 軸および直線 $x = \dfrac{\pi}{6}$ で囲まれた部分の面積は，

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f_3(x)\,dx = \Big[\sin 2x + x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sin\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \underset{\text{カ}}{\underline{\frac{\pi}{6}}}$$



（3）$f_4(x) = 8\cos^3 x - 4\cos x$ より，

$$\int f_4(x)\,dx = \int 4\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right)dx = \int 4\cos x\left(1 - 2\sin^2 x\right)dx$$

$$= \int\left(4\cos x - 8\sin^2 x\cos x\right)dx = \underbrace{4\sin x - \frac{8}{3}\sin^3 x}_{\text{キ}} + C' \quad (C'\text{は積分定数})$$

$\dfrac{2}{3}\pi \leqq 4x \leqq 2\pi$ より，曲線 $C_4 : y = \dfrac{\sin 4x}{\sin x}$ $\left(\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸の交点の x 座標を求めると，

$$\sin 4x = 0$$

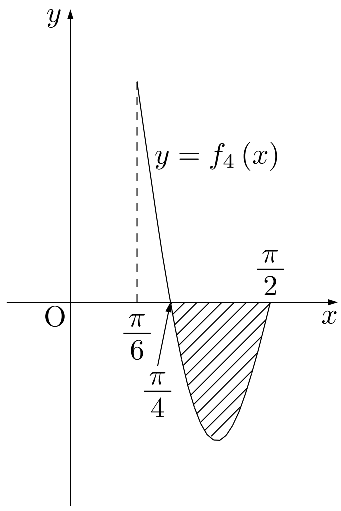
$$4x = \pi,\ 2\pi \qquad \therefore\quad x = \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}$$

よって，交点の座標は，$\left(\dfrac{\pi}{4},\, 0\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},\, 0\right)$

次に，$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，常に $\sin x > 0$ であり，$\sin 4x$ は

$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\sin 4x \geqq 0$

$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin 4x \leqq 0$



であるので，曲線 C_4 と x 軸で囲まれた部分の面積は，

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \{-f_4(x)\}\,dx$$

$$= \left[-4\sin x + \frac{8}{3}\sin^3 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -4\sin\frac{\pi}{2} + \frac{8}{3}\sin^3\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{4} - \frac{8}{3}\sin^3\frac{\pi}{4}$$

$$= -4 + \frac{8}{3} + \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$$

$$= -\frac{4}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \underbrace{\frac{4\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}}_{\text{ク}}$$

別解（$\boxed{\text{キ}}$および$\boxed{\text{ク}}$の導出過程）

$f_4(x) = 8\cos^3 x - 4\cos x = 8\left(\dfrac{3}{4}\cos x + \dfrac{1}{4}\cos 3x\right) - 4\cos x = 2\cos x + 2\cos 3x$ より，

$$\int f_4(x)\,dx = \int(2\cos x + 2\cos 3x)\,dx = \underbrace{2\sin x + \frac{2}{3}\sin 3x}_{\text{キ}} + C' \quad (C'\text{は積分定数})$$

であり，求める面積は，

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \{-f_4(x)\}\,dx = \left[-2\sin x - \frac{2}{3}\sin 3x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

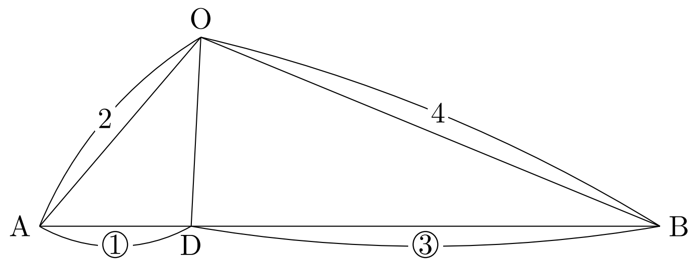
$$= -2\sin\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}\pi + 2\sin\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\sin\frac{3}{4}\pi$$

$$= -2 + \frac{2}{3} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \underbrace{\frac{4\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}}_{\text{ク}}$$

〔4〕

■解答例□

(1)



$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 5$$
$$|\vec{b} - \vec{a}| = 5$$

両辺正より，両辺を 2 乗すると，$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 4$ なので，

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 25$$
$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 25$$
$$16 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 4 = 25$$
$$2\vec{a}\cdot\vec{b} = -5$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{5}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

次に，点 D は辺 AB を 1 : 3 に内分する点なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \quad \cdots\cdots ②$$

よって，$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 4$，①より

$$\mathrm{OD} = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = \frac{1}{4}|3\vec{a} + \vec{b}|$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{9|\vec{a}|^2 + 6\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2} = \frac{1}{4}\sqrt{9\cdot 4 + 6\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) + 16} = \frac{\sqrt{37}}{4} \quad \cdots\cdots ③$$

(2) 点 H は直線 OD 上の点なので，実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OD}} \quad \cdots\cdots ④$$

よって，AH ⊥ OD より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$$
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$$
$$k|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2 - \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$$

ここで，②，③を用いると，

$$k|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-\vec{a}\cdot\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)=0$$

$$\frac{37}{16}k-\frac{3}{4}|\vec{a}|^2-\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

さらに，$|\vec{a}|=2$，①より

$$\frac{37}{16}k-\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=0$$

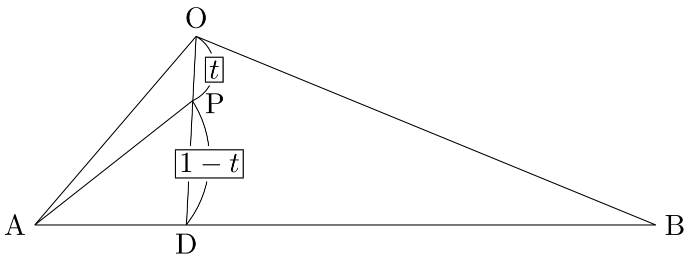
$$\frac{37}{16}k=\frac{19}{8}$$

$$k=\frac{38}{37}$$

したがって，②，④より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{38}{37}\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)=\frac{57}{74}\vec{a}+\frac{19}{74}\vec{b}$$

(3)



点 P は線分 OD を $t:1-t$ に内分する点なので，②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\quad\cdots\cdots⑤$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{3}{4}t\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{4}t\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{b}+\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{3}{4}t\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{b}-\vec{a}=\left(\frac{3}{4}t-1\right)\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{b}$$

(4) ⑤より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\left(t\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\vec{a}\right)\cdot\left(t\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\vec{b}\right)\\&=t^2|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{b}-t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

ここで，①〜③より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\frac{37}{16}t^2-t\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}-t\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=\frac{37}{16}t^2-\frac{1}{4}t|\vec{b}|^2-\frac{3}{4}t|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

さらに，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=4$，①より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{37}{16}t^2-\frac{1}{4}t\cdot 16-\frac{3}{4}t\cdot 4-t\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{2}$$

$$= \frac{37}{16}t^2 - \frac{9}{2}t - \frac{5}{2} = \frac{37}{16}\left(t^2 - \frac{72}{37}t\right) - \frac{5}{2} = \frac{37}{16}\left(t - \frac{36}{37}\right)^2 - \frac{37}{16}\left(\frac{36}{37}\right)^2 - \frac{5}{2}$$

よって，$0 < t < 1$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が最小となるときの t の値は $t = \frac{36}{37}$ である．

また，このとき，④，⑤より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{38}{37}\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \frac{36}{37}\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{2}{37}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

であるので，③より，

$$\mathrm{PH} = |\overrightarrow{\mathrm{PH}}| = \frac{2}{37}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = \frac{2}{37} \cdot \frac{\sqrt{37}}{4} = \frac{\sqrt{37}}{74}$$