第１問

I　ア　$-mg\ell\cos\theta_0$　　イ　$-mg\ell\cos\theta+\dfrac{1}{2}mu^2$　　ウ　$\sqrt{2g\ell(\cos\theta-\cos\theta_0)}$

II(1)　運動量保存則より

$$(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})v_0=m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}}$$

$$\therefore\quad v_{\mathrm{A}}=\left(1+\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}\right)v_0$$

(2)　落下運動の鉛直方向について，落下時間を t として

$$h=\frac{1}{2}gt^2\qquad\therefore\quad t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

速度の水平成分は v_{A} で一定なので

$$\mathrm{GG}'=v_{\mathrm{A}}t=\left(1+\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}\right)v_0t$$

ここで，v_0 は I で得た u が $\theta=0$ の場合なので

$$v_0=\sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_0)}$$

以上から

$$\mathrm{GG}'=2\left(1+\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}\right)\sqrt{h\ell(1-\cos\theta_0)}$$

$m_{\mathrm{A}}=m_{\mathrm{B}}$ の場合について数値を代入すると

$$\begin{aligned}\mathrm{GG}'&=4\sqrt{h\ell(1-\cos\theta_0)}\\&=4\sqrt{0.30\cdot2.0\cdot0.15}\\&=4\cdot0.30=1.2\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

III(1)　力学的エネルギー保存則より

$$-mg(\ell-\Delta\ell)\cos\theta''=-mg(\ell-\Delta\ell)\cos\theta'+\frac{1}{2}m(v')^2$$

与えられた近似を用いて

$$-mg(\ell-\Delta\ell)\left(1-\frac{(\theta'')^2}{2}\right)=-mg(\ell-\Delta\ell)\left(1-\frac{(\theta')^2}{2}\right)+\frac{1}{2}m(v')^2$$

$$\therefore\quad(\theta'')^2=(\theta')^2+\frac{(v')^2}{g(\ell-\Delta\ell)}$$

(2)　(1)より

$$v'=\sqrt{g(\ell-\Delta\ell)((\theta'')^2-(\theta')^2)}$$

Ⅰの u の式より

$$v=\sqrt{2g\ell(\cos\theta'-\cos\theta_0)}$$

与えられた近似を用いて

$$v=\sqrt{2g\ell\left\{\left(1-\frac{(\theta')^2}{2}\right)-\left(1-\frac{{\theta_0}^2}{2}\right)\right\}}$$
$$=\sqrt{g\ell({\theta_0}^2-(\theta')^2)}$$

面積速度一定の式を 2 乗して

$$\frac{1}{4}(\ell-\Delta\ell)^2\cdot g(\ell-\Delta\ell)((\theta'')^2-(\theta')^2)=\frac{1}{4}\ell^2\cdot g\ell({\theta_0}^2-(\theta')^2)$$
$$\therefore\quad (\theta'')^2=\underset{\sim\sim\sim}{(\theta')^2+\left(\frac{\ell}{\ell-\Delta\ell}\right)^3({\theta_0}^2-(\theta')^2)}$$

(3) (2)より

$$(\theta'')^2=-\left\{\left(\frac{\ell}{\ell-\Delta\ell}\right)^3-1\right\}(\theta')^2+\left(\frac{\ell}{\ell-\Delta\ell}\right)^3{\theta_0}^2$$

$(\theta')^2$ の係数は負であるから $(\theta'')^2$ は $\theta'=\underset{\sim}{0}$ に頂点を持ち，最大値をとる上に凸な放物線となる。このとき

$$(\theta'')^2=0+\left(\frac{\ell}{\ell-\Delta\ell}\right)^3{\theta_0}^2\qquad\therefore\quad\theta''=\underset{\sim\sim\sim}{\left(\frac{\ell}{\ell-\Delta\ell}\right)^{\frac{3}{2}}\theta_0}$$

(4) 各サイクルについて，(3)と同様に

$$\theta_n=\left(\frac{\ell}{\ell-\Delta\ell}\right)^{\frac{3}{2}}\theta_{n-1}$$

となるので

$$\theta_n=\left\{\left(\frac{\ell}{\ell-\Delta\ell}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^n\theta_0=\underset{\sim\sim\sim}{\left(\frac{\ell}{\ell-\Delta\ell}\right)^{\frac{3}{2}n}\theta_0}$$

(5) (4)より

$$\theta_N=\left(1-\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^{-\frac{3}{2}N}\theta_0$$

$\theta_N\geqq 2\theta_0$ の対数をとっても大小関係は同じなので

$$-\frac{3}{2}N\log_{10}\left(1-\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)\geqq\log_{10}2$$
$$\frac{3}{2}N\cdot 0.046\geqq 0.30$$
$$\therefore\quad N\geqq 4.3$$

N は自然数なので，$N=\underset{\sim}{5}$ で初めて $\theta_N\geqq 2\theta_0$ を満たす。

第２問

I (1) $C_0 = \dfrac{\varepsilon S}{d}$

(2) コンデンサーの電気容量 $C(x)$ は，$C(x) = \dfrac{\varepsilon S}{d-x}$ となるので，静電エネルギー $U(x)$ は

$$U(x) = \frac{1}{2}C(x)V^2 = \underline{\frac{\varepsilon S}{2\,(d-x)}V^2}$$

(3) 題意より

$$W_0 = V\cdot\left(C(d/4) - C(x)\right)V = \frac{\varepsilon S(d-4x)}{3d\,(d-x)}V^2$$

静電エネルギーの変化は

$$\varDelta U = \frac{1}{2}\left(C(d/4) - C(x)\right)V^2 = \frac{1}{2}W_0$$

であるから，エネルギー保存より

$$\begin{aligned} W &= \varDelta U - W_0 \\ &= -\frac{1}{2}W_0 = \underline{\frac{\varepsilon S(4x-d)}{6d\,(d-x)}V^2} \end{aligned}$$

$$\frac{W}{W_0} = \underline{-\frac{1}{2}}\ 倍$$

II (1) 導線 a を外す前は板 D に $+2C_0V$，板 B に $-2C_0V$ の電荷があり，板 A と板 C には電荷はない。これは導線 a を外しても変わらないので，ア：$\underline{0}$，イ：$\underline{2}$

(2) 電位の関係，および電荷保存より

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = \alpha V \\ -4C_0V_1 + 2C_0V_2 = 2C_0V \end{cases}$$

$$\therefore\quad V_1 = \underline{\frac{1}{3}(\alpha-1)V}\quad,\qquad V_2 = \underline{\frac{1}{3}(2\alpha+1)V}$$

III (1) 全体の電気容量 C_t は

$$\frac{1}{C_\mathrm{t}} = \frac{1}{2C_0} + \frac{1}{4C_0}\qquad\therefore\quad C_\mathrm{t} = \frac{4}{3}C_0$$

よって

$$T = 2\pi\sqrt{LC_\mathrm{t}} = \underline{4\pi\sqrt{\frac{LC_0}{3}}}$$

(2) $t=0$ でコイルにかかる電圧は，$2V$。また，題意より

$$L\frac{\varDelta I}{\varDelta t}=LI_0\cdot\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$t=0$ の瞬間を考えて，

$$\frac{2\pi LI_0}{T}=2V \qquad \therefore\quad I_0=\frac{VT}{\pi L}$$

(3) $t=\frac{T}{4}$ のとき，コイルにかかる電圧は 0 であるから，

$$\frac{Q_3}{4C_0}+\frac{Q_4}{2C_0}=0 \qquad \therefore\quad Q_3=-2\cdot Q_4$$

$Q_3=0$ のとき，$Q_4=2C_0V$ であるから，$L\frac{\varDelta I}{\varDelta t}=\frac{2C_0V}{2C_0}=V$ となる。よって，

$$\cos\left(\frac{2\pi t'}{T}\right)=\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad t'=\frac{1}{6}T\ ,\ \frac{5}{6}T$$

(4) $t=0$ のとき，II(2)の結果より $V_1=\frac{1}{3}V$，$V_2=\frac{5}{3}V$ なので

$$E_1=\frac{1}{2}\cdot4C_0{V_1}^2+\frac{1}{2}\cdot2C_0{V_2}^2=3C_0V^2$$

$t=\frac{T}{4}$ のとき，(3)の結果および電荷保存より

$$-Q_3+Q_4=3Q_4=2C_0V$$

$$\therefore\quad Q_4=\frac{2}{3}C_0V\ ,\quad Q_3=-\frac{4}{3}C_0V$$

$$\therefore\quad E_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4C_0}\left(\frac{4}{3}C_0V\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2C_0}\left(\frac{2}{3}C_0V\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}C_0V^2$$

また，

$$E_1=E_2+\frac{1}{2}L{I_0}^2$$

$$\therefore\quad \varDelta E=E_2-E_1=-\frac{1}{2}L{I_0}^2$$

(5) $t=0$ のとき $I=0$ なので，

$$\frac{\varDelta Q_3}{\varDelta t}=\frac{\varDelta Q_4}{\varDelta t}=0$$

また，$t=\frac{T}{4}$ のとき，(4)より $Q_3<0$，加えて，振動の周期が T なので，④

第３問

Ⅰ(1)　屈折の法則より

$$\sin\theta = n\sin\phi$$

(2)　時間 Δt の間の光子の集まりについて

$$E = Q\Delta t$$

$$\therefore\quad p = \frac{E}{c} = \frac{Q\Delta t}{c}$$

(3)　AB に平行な方向の運動量の変化はなく，AB に垂直な方向 (C → O 方向) の運動量の変化を考えると

$$\begin{aligned}\Delta p &= p\sin(\theta-\phi) - \{-p\sin(\theta-\phi)\}\\ &= 2p\sin(\theta-\phi)\end{aligned}$$

(1)より $\theta > \phi$ であり，$\Delta p > 0$ なので，光子は C → O の向きに力を受ける。

(4)　(2)と運動量変化と力積の関係より

$$2p\sin(\theta-\phi) = f\Delta t$$

$$\therefore\quad f = \frac{2Q}{c}\sin(\theta-\phi)$$

微粒子が受ける力は光子が受ける力の反作用であるから，微粒子は O → C の向きに力を受ける。

(5)　与えられた近似を用いると(1)は $\theta \fallingdotseq n\phi$ となる。また，$r\phi \fallingdotseq d$ と(4)より

$$\begin{aligned}f &\fallingdotseq \frac{2Q}{c}(\theta-\phi)\\ &= \frac{2Q}{c}(n-1)\phi\\ &= \frac{2(n-1)Qd}{cr}\end{aligned}$$

Ⅱ(1)　光子は力積を受けないので，微粒子にも力は働かない。

(2)　左側からの光子は右下向きの力積を受けるので，作用・反作用の法則より微粒子は左上の力を受ける。また，右側からの光子は左下向きの力積を受けるので，作用・反作用の法則より微粒子は右上の力を受ける。よって合力を考えると上向きに力を受ける。

(3)　OF の距離が増加することは図３－２の θ，ϕ が増加することに相当するので，Ⅰ(5)より d は増加する。光の進路と OF のなす角を β，中心 O と元の光の進路との距離を h として，Ⅰ(1)と図３－２を考えて $d = r\sin\phi$，$h = r\sin\theta$，$h = \Delta y\cdot\sin\beta$ より，

$$\therefore\quad d = r\frac{\sin\theta}{n} = \frac{h}{n} = \frac{\sin\beta}{n}\Delta y$$

よって d と Δy は比例するので，Ⅰ(5)より f' は Δy に比例する。よって，イ。

Ⅲ(1) 図 3 − 6 より

$$h = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\Delta x \cos\alpha}$$

また，Ⅰ(1)と $h = r\sin\theta$，$d = r\sin\phi$ を考えて

$$\begin{aligned} d &= r\frac{\sin\theta}{n} \\ &= \frac{h}{n} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\cos\alpha}{n}\Delta x} \end{aligned}$$

(2) Ⅰ(5)より，それぞれから微粒子に及ぼされる力は f であり，与えられた近似を用いると光線は直進するので f と平板 (水平線) とのなす角は α である。合力は左向きであり，(1)も考えて

$$\begin{aligned} f' &= 2\cos\alpha\cdot f \\ &= 2\cos\alpha\cdot\frac{2(n-1)Qd}{cr} \\ &= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{4(n-1)Q\Delta x}{ncr}\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

(3) 力のつり合い $f_0 = f'$ より

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{4\cdot(1.5-1)\cdot 5\times 10^{-3}\cdot 1\times 10^{-6}}{1.5\cdot 3\times 10^{8}\cdot 1\times 10^{-5}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &\fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{1\times 10^{-12}\ \mathrm{N}} \end{aligned}$$