2020 年度　東京大学　文科　数学　解答例

第 1 問

　$f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$ とおく．$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x-2a)$ より方程式 $f'(x) = 0$ の解は $x = 0,\ 2a$．$a > 0$ に注意すると $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$b-4a^3$	$\nearrow$

よって，条件 1 より $f(0) = 0$ または $f(2a) = 0$ であるが，$b > 0$ より $b = 4a^3$ である．すなわち，$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$ である．ここで，C と x 軸で囲まれた領域を D とする．ただし，境界は含めない．そして，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ．

　C と x 軸との共有点のうち，点 $(2a,\ 0)$ と異なるものは点 $(-a,\ 0)$ である．$-a \leqq x \leqq 2a$ において，$f(x)$ の最大値は $f(0)$ であることに着目すると，D 内に唯一含まれる格子点は点 $(0,\ 1)$ であるから

$$1 < f(0) \leqq 2$$

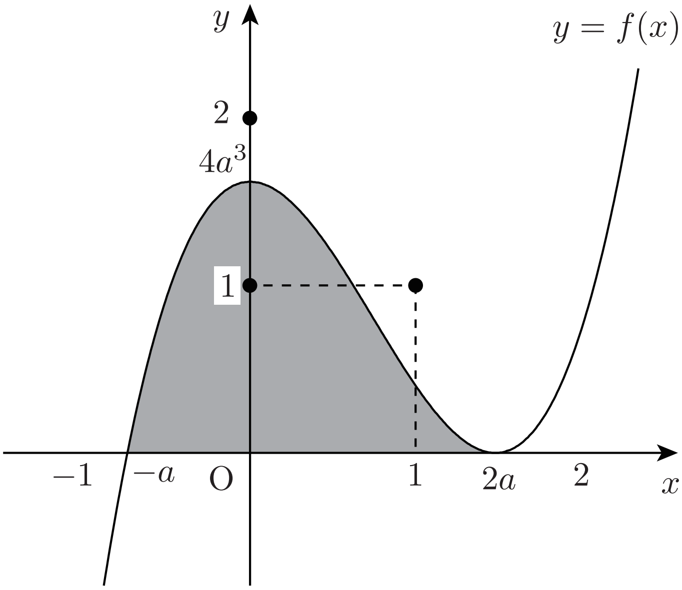
$$1 < 4a^3 \leqq 2$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} < a \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

すなわち，$2^{-\frac{2}{3}} < a \leqq 2^{-\frac{1}{3}}$ が必要条件である．このとき，$a \leqq 1$ より $-1 \leqq -a$，$2a \leqq 2$ は成り立つ．さらに

$$2a > 2 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} > 1$$

より，$2a > 1$．



すなわち，D 内かつ直線 $x=1$ 上に格子点を含まない条件を考えなければならない．それは

$$f(1) \leqq 1$$

$$1-3a+4a^3 \leqq 1$$

$$0<a \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \ (a>0 \text{ より})$$

である．すなわち，求める a の値の範囲は

$$2^{-\frac{2}{3}}<a \leqq 2^{-\frac{1}{3}} \text{ かつ } 0<a \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから，$2^{-\frac{1}{3}}$ と $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の大小関係を調べる．各々を 6 乗すると

$$\begin{aligned}\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^6-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 &= \frac{1}{4}-\frac{27}{64}\\ &= -\frac{11}{64}\\ &< 0\end{aligned}$$

より $\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^6 < \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$．当然，$2^{-\frac{1}{3}} > 0$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$ であるから $2^{-\frac{1}{3}} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

したがって，$b = 4a^3$ であり，求める a の値の範囲は $2^{-\frac{2}{3}} < a \leqq 2^{-\frac{1}{3}}$ である．

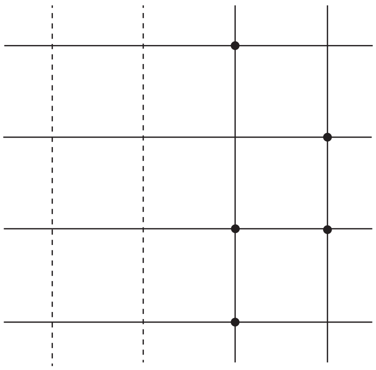
第2問

(1)　以下の2つの場合がある．

(i)　選んだ点を含まない2本が平行である場合

　このとき下図（破線は選んだ点を含まないことを意味する）のようになっているが，ここで破線に垂直な方向に点が2個並んでいる直線の選び方が${}_4C_1 = 4$通り，残り3個の点を破線に垂直な3本の直線上の2つの交点のうちどちらをとるかで$2^3 = 8$通り，平行な2本の直線の選び方が$2 \cdot {}_4C_2 = 12$通りより，このときの場合の数は

$$12 \cdot 4 \cdot 8 = 384\,(\text{通り})$$



(ii)　選んだ点を含まない2本が垂直である場合

　このとき下図のようになっているが，この図のときに選んだ点を含まない直線が3本であるのは，残りの1本の直線の選び方が6通り，2本の直線上に5個の点を選ぶ選び方が${}_6C_5 = 6$通りより，36通りである．

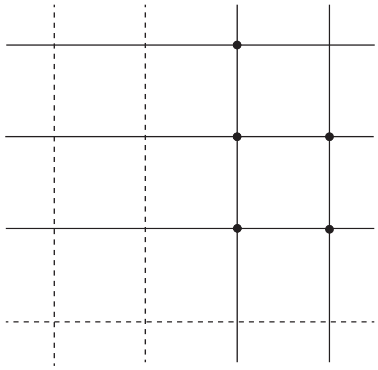
　3本の直線上の9個から5個を選ぶ選び方が${}_9C_5 = 126$通り，垂直な2本の選び方が$4 \cdot 4 = 16$通りより，このときの場合の数は

$$16 \cdot (126 - 36) = 1440\,(\text{通り})$$

　よって，求める選び方は

$$384 + 1440 = 1824\,(\text{通り})$$

である．



(2)　選んだ点を 1 個も含まない直線の本数によって場合分けをする．

(i)　4 本以上の場合

選ぶことができる点は 4 個以下であるから，このような場合はない．

(ii)　3 本の場合

あり得るのは平行な 2 本とそれに垂直な 1 本の場合のみであるから，(1) の解答より，平行な 2 本の選び方が $2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 = 12$ 通り，それに垂直な 1 本の選び方が ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$ 通りで，6 個から 5 個を選ぶ選び方が ${}_6\mathrm{C}_5 = 6$ 通りより

$$12 \cdot 4 \cdot 6 = 288\,(\text{通り})$$

(iii)　1 本の場合

その 1 本 l の選び方が 8 通り，残りの 12 個の交点の中から 5 個を選ぶ選び方が ${}_{12}\mathrm{C}_5 = 792$ 通りであるが，このうち (1) の (i) の場合はもう 1 つの直線の選び方が ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 通り，そのそれぞれの場合の数が 32 通り，(1) の (ii) の場合はもう 1 つの直線の選び方が 4 通り，そのそれぞれの場合の数が 90 通り，上記 (2) の (ii) の場合，l に平行な直線があるとき，その直線の選び方が ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 通り，それに垂直な直線の選び方が 4 通り，l に平行な直線がないとき，l に垂直な 2 本の選び方が ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通りで，これらのそれぞれについて 5 個の点の選び方が ${}_6\mathrm{C}_5 = 6$ 通りである．

l の選び方は 8 通りより，選んだ点を含まない直線が 1 本となる選び

方は

$$8 \cdot \{792 - 3 \cdot 32 - 4 \cdot 90 - (3 \cdot 4 + 6) \cdot 6\} = 1824(\text{通り})$$

したがって，16 個から 5 個を選ぶ選び方は ${}_{16}\mathrm{C}_5 = 4368$ 通りより求める選び方は

$$4368 - (1824 + 288 + 1824) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{432\,(\text{通り})}$$

である．

第 3 問

(1) $\mathrm{P}(p, p^2-2p+4)$ $(p \geqq 0)$ とする．

(i) $p=0$ のとき，半直線 OP は直線 $x=0$ の $y \geqq 0$ の部分と一致する．

(ii) $p>0$ のとき，半直線 OP の方程式は

$$y=\frac{p^2-2p+4}{p}x \ \ (x \geqq 0)$$

である．

半直線 OP が点 (s, t) を通るとすると，$s \geqq 0,\, t \geqq 0$ であり

$$t=\frac{p^2-2p+4}{p}s$$

$$sp^2-(2s+t)p+4s=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす正の実数 p が存在するような s, t の条件を求めればよい．

$s=0$ のとき，① は $tp=0$ となる．$p>0$ より $t=0$ で，点 (s, t) は原点 O に一致する．

$s>0$ のとき，① の左辺を $f(p)$ とおくと，$q=f(p)$ は pq 平面上で下に凸の放物線を表す．

軸の方程式は $p=\dfrac{2s+t}{2s}$ であり，$s>0,\, t \geqq 0$ より $\dfrac{2s+t}{2s}>0$ であるから，放物線の軸は常に $p>0$ の範囲にある．

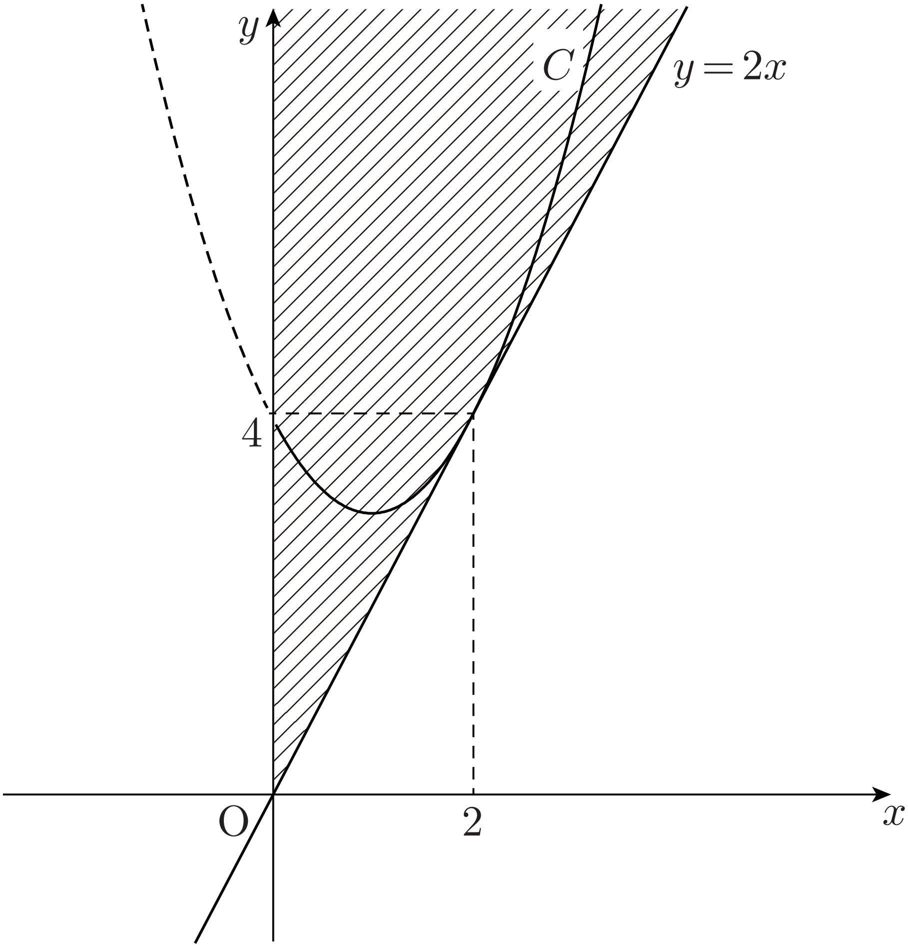
さらに，$f(0)=4s>0$ であるから，① の判別式を D とおくと，求める条件は

$$D=(2s+t)^2-16s^2 \geqq 0$$

$$(t+6s)(t-2s) \geqq 0$$

$$t \geqq 2s \ \ (t+6s>0 \text{ より})$$

以上，(i)(ii) より，求める領域は下の図の斜線部のようになる．ただし，境界はすべて含む．



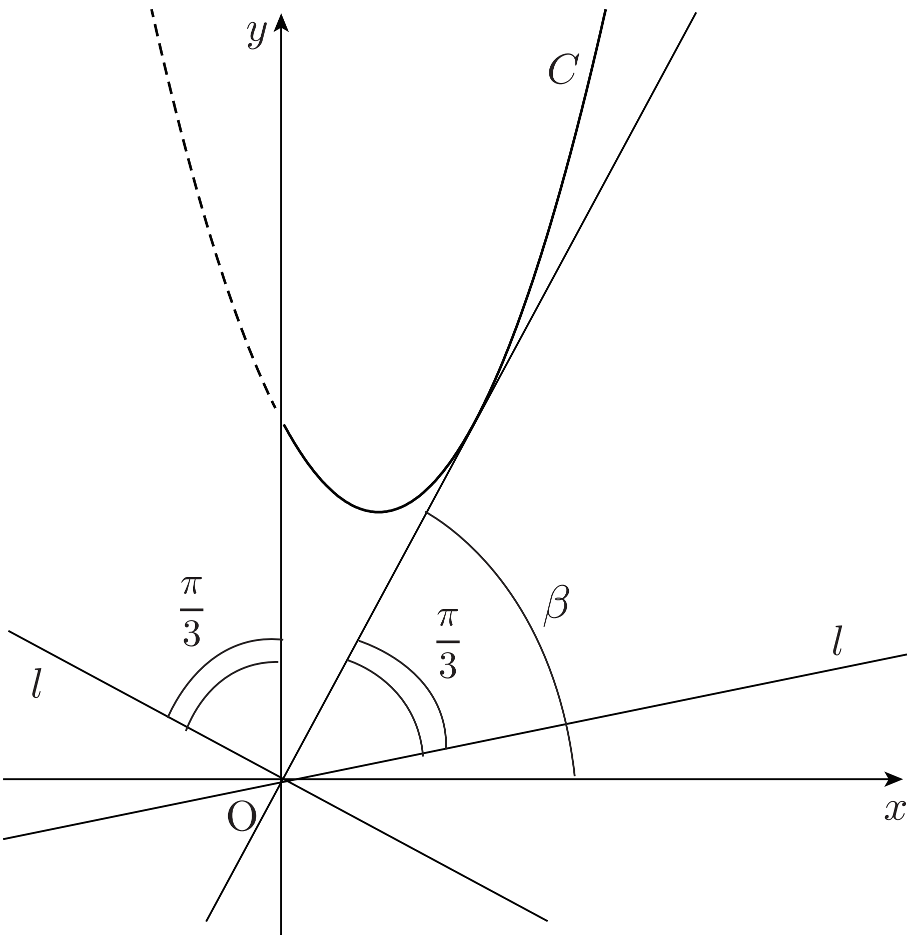
(2)　直線 l と x 軸の正の向きとのなす角を $\theta\,(0 \leqq \theta < \pi)$ とすると，$a = \tan\theta$ である．

また，直線 OA と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると，$\beta \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．ただし，β は $\tan\beta = 2$ を満たす $\dfrac{\pi}{3} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ の角である．

条件より

$$\theta - \alpha = \pm\frac{\pi}{3}$$

である．



$\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\beta \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$

より α を消去すると

$$\beta+\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi$$

である．

$\theta-\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\beta \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$

より α を消去すると

$$\beta-\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6}$$

である．

$$\tan\left(\beta \pm \frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pm\sqrt{3}}{1\mp 2\sqrt{3}}=\frac{\mp 5\sqrt{3}-8}{11} \quad (\text{複号同順})$$

$$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\frac{5}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

であるから，求める a の値の範囲は

$$\underline{\frac{-5\sqrt{3}-8}{11} \leqq a \leqq -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}-8}{11} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

である．

第 4 問

(1)　$\left(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}\right)^2$ を計算すると，

$$\left(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}\right)^2=\left\{\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}\right\}^2=4^n-2^{n+1}+1$$

である．

ここで，$\left(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}\right)^2$ を展開すると，

$$\begin{aligned}&\left(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}\right)^2\\=&(2^0+2^2+2^4+\cdots\cdots+2^{2n-2})\\&\quad+2(2^0\cdot2^1+2^0\cdot2^2+2^0\cdot2^3+\cdots\cdots+2^0\cdot2^{n-1}\\&\qquad\quad+2^1\cdot2^2+\cdots\cdots+2^{n-2}\cdot2^{n-1})\\=&\frac{1\cdot(4^n-1)}{4-1}+2a_{n,\ 2}\\=&\frac{4^n-1}{3}+2a_{n,\ 2}\end{aligned}$$

となることから，

$$a_{n,\ 2}=\frac{4^n-2^{n+1}+1-\dfrac{4^n-1}{3}}{2}=\frac{4^n-3\cdot2^n+2}{3}$$

(2)　関数

$$(2^0x+1)(2^1x+1)(2^2x+1)\cdots\cdots(2^{n-1}x+1)$$

を展開したとき，定数項は 1 である．また，x^k $(1\leqq k\leqq n)$ の係数は，2^0，2^1，2^2，$\cdots\cdots$，2^{n-1} から異なる k 個を選び，それらの積をとったものを k 個の選び方すべてについて足し合わせたものに一致し，これは $a_{n,\ k}$ に他ならない．ゆえに

$$(2^0x+1)(2^1x+1)(2^2x+1)\cdots\cdots(2^{n-1}x+1)=f_n(x)$$

である．

このことから

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= (2^0x+1)(2^1x+1)(2^2x+1)\cdots\cdots(2^{n-1}x+1)(2^nx+1) \\ &= f_n(x)(2^nx+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= (2^0x+1)(2^1x+1)(2^2x+1)\cdots\cdots(2^{n-1}x+1)(2^nx+1) \\ &= (2^0x+1)\cdot\{2^0(2x)+1\}\{2^1(2x)+1\}\cdots\cdots \\ &\qquad\qquad\cdots\cdots\{2^{n-2}(2x)+1\}\{2^{n-1}(2x)+1\} \\ &= (x+1)f_n(2x) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \underline{2^nx+1}, \quad \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = \underline{x+1}$$

(3)　$a_{n+1,\ k+1}$ は $f_{n+1}(x)$ の x^{k+1} の係数，$a_{n,\ k}$ は $f_n(x)$ の x^k の係数である．(2) の結果より，

$$f_{n+1}(x) = (2^nx+1)f_n(x) \quad \cdots\cdots①$$

$$f_{n+1}(x) = (x+1)f_n(2x) \quad \cdots\cdots②$$

①，②において，x^{k+1} の係数を比較すると

$$a_{n+1,\ k+1} = 2^n a_{n,\ k} + a_{n,\ k+1} \quad \cdots\cdots③$$

$$a_{n+1,\ k+1} = 2^k a_{n,\ k} + 2^{k+1} a_{n,\ k+1} \quad \cdots\cdots④$$

③ $\times\ 2^{k+1} -$ ④ より

$$(2^{k+1}-1)a_{n+1,\ k+1} = 2^k(2^{n+1}-1)a_{n,\ k}$$

$$\frac{a_{n+1,\ k+1}}{a_{n,\ k}} = \underline{\frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}}$$

別解

(2)　集合 $X_{n,\ k}$ を

$X_{n,\ k}$: 集合 $\{2^0,\ 2^1,\ \cdots\cdots,\ 2^{n-1}\}$ から異なる k 個を選んでその積を取ったもの全体からなる集合

と定義する．このとき，$X_{n,\ k}$ の要素を全て足し合わせたものが $a_{n,\ k}$ である．

$X_{n+1,\ k}$ の要素を 2^n が選ばれているか否かで 2 つに分けたとき，2^n が選ばれているものの総和は $2^n \cdot a_{n,\ k-1}$，2^n が選ばれていないものの総和は $a_{n,\ k}$ であるから，

$$a_{n+1,\ k} = 2^n a_{n,\ k-1} + a_{n,\ k} \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．ここで，$a_{n,\ 0} = 1$，$a_{n,\ -1} = 0$，$a_{n,\ n+1} = 0$ と定義すると，①は $0 \leqq k \leqq n+1$ の範囲で成り立つ．

以上から，

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,\ k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (2^n a_{n,\ k-1} + a_{n,\ k}) x^k \\ &= 2^n x \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,\ k-1} x^{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,\ k} x^k \\ &= 2^n x \sum_{k=0}^{n} a_{n,\ k} x^k + \sum_{k=0}^{n} a_{n,\ k} x^k \\ &= (2^n x + 1) f_n(x) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 2^n x + 1$$

次に，$X_{n+1,\,k}$ の要素を 2^0 が選ばれているか否かで 2 つに分けたとき，2^0 が選ばれているものの総和は $2^{k-1}a_{n,\,k-1}$，2^0 が選ばれていないものの総和は $2^k a_{n,\,k}$ であるから，

$$a_{n+1,\,k} = 2^{k-1}a_{n,\,k-1} + 2^k a_{n,\,k} \quad \cdots\cdots②$$

が成り立ち，$a_{n,\,0} = 1$，$a_{n,\,-1} = 0$，$a_{n,\,n+1} = 0$ と定義すると，②は $0 \leqq k \leqq n+1$ の範囲で成り立つ．よって

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,\,k}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(2^{k-1}a_{n,\,k-1} + 2^k a_{n,\,k})x^k \\
&= x\sum_{k=0}^{n+1} a_{n,\,k-1}(2x)^{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,\,k}(2x)^k \\
&= x\sum_{k=0}^{n} a_{n,\,k}(2x)^k + \sum_{k=0}^{n} a_{n,\,k}(2x)^k \\
&= (x+1)f_n(2x)
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = x+1$$

(3)　①, ② より

$$a_{n+1,\,k+1} = 2^n a_{n,\,k} + a_{n,\,k+1} \quad \cdots\cdots①'$$

$$a_{n+1,\,k+1} = 2^k a_{n,\,k} + 2^{k+1}a_{n,\,k+1} \quad \cdots\cdots②'$$

①$'$ $\times\, 2^{k+1} -$ ②$'$ より

$$(2^{k+1}-1)a_{n+1,\,k+1} = 2^k(2^{n+1}-1)a_{n,\,k}$$

$$\frac{a_{n+1,\ k+1}}{a_{n,\ k}} = \frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}$$