2020 年度　東京大学　理科　数学　解答例

第 1 問

$$ax^2+bx+c>0 \qquad \cdots\cdots①$$
$$bx^2+cx+a>0 \qquad \cdots\cdots②$$
$$cx^2+ax+b>0 \qquad \cdots\cdots③$$

とする．

(1)　$a<0$ であると仮定すると

$$\lim_{x\to\infty}(ax^2+bx+c)=-\infty$$

であるから，$x>p$ である十分大きな x で ① を満たさないので不適．

　同様に，$b<0$, $c<0$ と仮定したときも，それぞれ ②，③ を満たさないので不適．

　以上より，a, b, c はすべて 0 以上である．

(2)　$abc\neq 0$ であると仮定すると，(1) より $a>0$, $b>0$, $c>0$ である．

$$\lim_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}(bx^2+cx+a)=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}(cx^2+ax+b)=\infty$$

であるから，$x\leqq p$ である十分小さな x で ①，②，③ をすべて満たす．

よって，①，②，③ をすべて満たす実数 x の集合は $x>p$ 以外にも存在するので不適．

　以上より，a, b, c のうち少なくとも 1 つは 0 である．

(3)　a, b, c がすべて 0 に等しいとき，①，②，③ はそれぞれ

$$0 > 0$$

となり不適であるから，a, b, c のうち少なくとも 1 つは正である．

a が 0 に等しいとき，①，②，③ はそれぞれ

$$bx + c > 0 \qquad \cdots\cdots ①'$$
$$bx^2 + cx > 0 \qquad \cdots\cdots ②'$$
$$cx^2 + b > 0 \qquad \cdots\cdots ③'$$

となる．①$'$ より，②$'$ の解は

$$x > 0$$

となる．b, c のうち少なくとも 1 つは正であるから，これは ①$'$，②$'$，③$'$ をすべて満たすので

$$p = 0$$

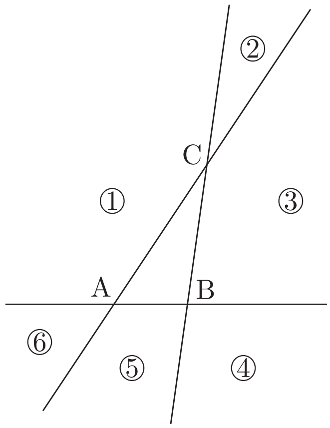
である．

b が 0 に等しいとき，c が 0 に等しいときも同様に $p = 0$ である．

以上より，$p = 0$ であることが示された．

第2問

　Xが△ABCの周および内部にある場合，$\triangle \mathrm{ABX}+\triangle \mathrm{BCX}+\triangle \mathrm{CAX}=1$ なので条件を満たさないことに注意して，平面を以下のように6個の部分に分ける．



(i)　①の場合

　直線ACと平行な直線上に点Xがあるとし，点Bと直線ACとの距離を h，点Xと直線ACとの距離を kh とおくと

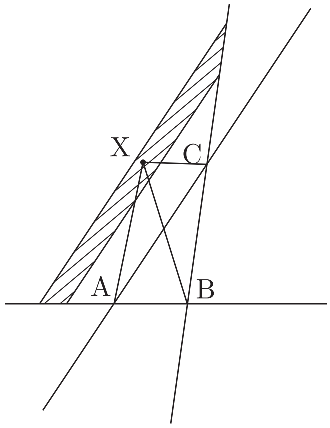
$$(\triangle \mathrm{ABX}+\triangle \mathrm{BCX})+\triangle \mathrm{CAX}=(1+k)+k$$

より

$$\frac{1}{2} \leqq k \leqq 1$$

よって，下図よりこの部分でXが動きうる範囲は下図斜線部となり，その面積は

$$2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$$



(ii)　② の場合

直線 AB と平行な直線上に点 X があるとし，点 C と直線 AB との距離を h'，C を通り AB に平行な直線と点 X との距離を kh' とおくと

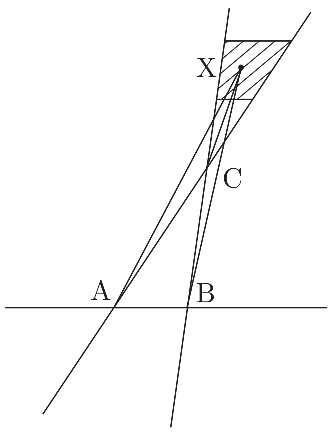
$$\triangle \mathrm{ABX} + (\triangle \mathrm{BCX} + \triangle \mathrm{CAX}) = (1+k) + (1+k-1)$$

より

$$\frac{1}{2} \leqq k \leqq 1$$

よって，下図よりこの部分で X が動きうる範囲は下図斜線部となり，その面積は

$$1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$



(i)，(ii) と対称性より ①, ③, ⑤ および ②, ④, ⑥ はそれぞれ同様な形になるから，求める面積は

$$3\left(\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\right)=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{15}{2}}$$

である．

第 3 問

(1) $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{3\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$ より

$$\begin{aligned}\frac{y(t)}{x(t)} &= 3\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \\ &= 3\sqrt{-1+\frac{2}{1+t}}\end{aligned}$$

となり，分数関数 $-1+\dfrac{2}{1+t}$ は単調に減少するので， $-1 < t \leqq 1$ において $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少する．

(2)

$$\begin{aligned}f(t) &= \sqrt{\{x(t)\}^2+\{y(t)\}^2} \\ &= (1+t)\sqrt{(1+t)+9(1-t)} \\ &= \sqrt{2}(1+t)\sqrt{5-4t}\end{aligned}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}f'(t) &= \sqrt{2}\left\{\sqrt{5-4t}+(1+t)\cdot\frac{-2}{\sqrt{5-4t}}\right\} \\ &= \frac{3(1-2t)\sqrt{2}}{\sqrt{5-4t}}\end{aligned}$$

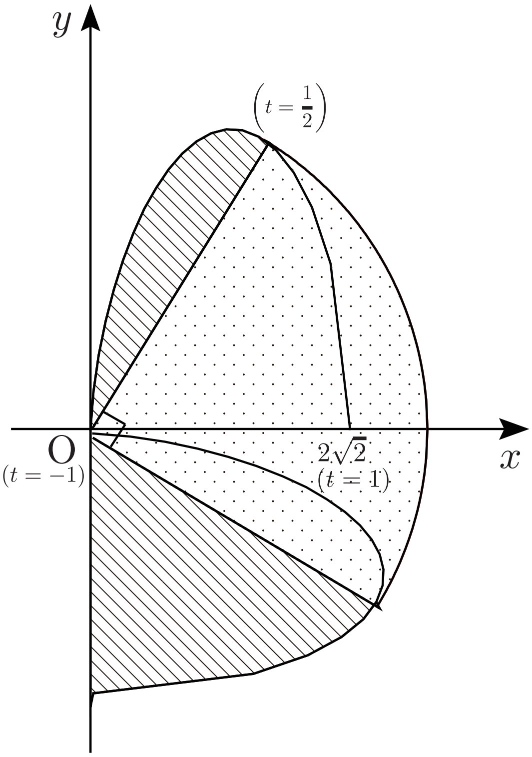
であるから，$-1 \leqq t \leqq 1$ における $f(t)$ の増減表は右のようになるので，$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{5-4\cdot\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

をとる．

(3) $-1 \leqq t \leqq 1$ において $x(t)=(1+t)^{\frac{3}{2}}$ が単調増加であることと (1)，(2) より，D を，原点を中心として時計回りに $90^\circ\left(=\dfrac{\pi}{2}\right)$ 回転させたとき，通過する領域は右図の斜線部および打点部分である．



したがって，斜線部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} y dx &= \int_{-1}^{1} 3(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3\sqrt{1+t}}{2}dt \\ &= \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}dt \\ &= 9\int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}dt \ \left(\sqrt{1-t^2}\text{は偶関数，}t\sqrt{1-t^2}\text{は奇関数より}\right)\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$ は，半径が 1 で中心角が $\dfrac{\pi}{2}$ の扇形の面積に等しいから

$$9\int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}dt = \frac{9}{4}\pi$$

である．また，打点部分の面積は，半径が $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ で中心角が $\dfrac{\pi}{2}$ の扇形の面積だから

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{27}{8}\pi$$

である．ゆえに，求める面積は

$$\frac{9}{4}\pi + \frac{27}{8}\pi = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{45}{8}\pi}$$

である．

第４問

(1)　$\left(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}\right)^2$ を計算すると，

$$\left(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}\right)^2=\left\{\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}\right\}^2=4^n-2^{n+1}+1$$

である．

ここで，$\left(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}\right)^2$ を展開すると，

$$\begin{aligned}
&\left(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}\right)^2\\
=&(2^0+2^2+2^4+\cdots\cdots+2^{2n-2})\\
&\quad+2(2^0\cdot 2^1+2^0\cdot 2^2+2^0\cdot 2^3+\cdots\cdots+2^0\cdot 2^{n-1}\\
&\qquad\quad+2^1\cdot 2^2+\cdots\cdots+2^{n-2}\cdot 2^{n-1})\\
=&\frac{1\cdot(4^n-1)}{4-1}+2a_{n,\ 2}\\
=&\frac{4^n-1}{3}+2a_{n,\ 2}
\end{aligned}$$

となることから，

$$a_{n,\ 2}=\frac{4^n-2^{n+1}+1-\dfrac{4^n-1}{3}}{2}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{4^n-3\cdot 2^n+2}{3}}$$

(2)　関数

$$(2^0x+1)(2^1x+1)(2^2x+1)\cdots\cdots(2^{n-1}x+1)$$

を展開したとき，定数項は１である．また，x^k $(1\leqq k\leqq n)$ の係数は，2^0，2^1，2^2，$\cdots\cdots$，2^{n-1} から異なる k 個を選び，それらの積をとったものを k 個の選び方すべてについて足し合わせたものに一致し，これは $a_{n,\ k}$ に他ならない．ゆえに

$$(2^0x+1)(2^1x+1)(2^2x+1)\cdots\cdots(2^{n-1}x+1)=f_n(x)$$

である．

　このことから

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= (2^0x+1)(2^1x+1)(2^2x+1)\cdots\cdots(2^{n-1}x+1)(2^nx+1) \\
&= f_n(x)(2^nx+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= (2^0x+1)(2^1x+1)(2^2x+1)\cdots\cdots(2^{n-1}x+1)(2^nx+1) \\
&= (2^0x+1)\cdot\{2^0(2x)+1\}\{2^1(2x)+1\}\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\{2^{n-2}(2x)+1\}\{2^{n-1}(2x)+1\} \\
&= (x+1)f_n(2x)
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \underline{2^nx+1}, \quad \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = \underline{x+1}
$$

(3)　$a_{n+1,\ k+1}$ は $f_{n+1}(x)$ の x^{k+1} の係数，$a_{n,\ k}$ は $f_n(x)$ の x^k の係数である．(2) の結果より，

$$
f_{n+1}(x) = (2^nx+1)f_n(x) \quad \cdots\cdots①
$$

$$
f_{n+1}(x) = (x+1)f_n(2x) \quad \cdots\cdots②
$$

①，②において，x^{k+1} の係数を比較すると

$$
a_{n+1,\ k+1} = 2^na_{n,\ k} + a_{n,\ k+1} \quad \cdots\cdots③
$$

$$
a_{n+1,\ k+1} = 2^ka_{n,\ k} + 2^{k+1}a_{n,\ k+1} \quad \cdots\cdots④
$$

③ $\times\, 2^{k+1} -$ ④ より

$$
(2^{k+1}-1)a_{n+1,\ k+1} = 2^k(2^{n+1}-1)a_{n,\ k}
$$

$$
\frac{a_{n+1,\ k+1}}{a_{n,\ k}} = \underline{\frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}}
$$

$\boxed{\text{別解}}$

(2)　集合 $X_{n,\,k}$ を

$X_{n,\,k}$: 集合 $\{2^0,\, 2^1,\, \cdots\cdots,\, 2^{n-1}\}$ から異なる k 個を選んでその積を取ったもの全体からなる集合

と定義する．このとき，$X_{n,\,k}$ の要素を全て足し合わせたものが $a_{n,\,k}$ である．

$X_{n+1,\,k}$ の要素を 2^n が選ばれているか否かで 2 つに分けたとき，2^n が選ばれているものの総和は $2^n \cdot a_{n,\,k-1}$，2^n が選ばれていないものの総和は $a_{n,\,k}$ であるから，

$$a_{n+1,\,k} = 2^n a_{n,\,k-1} + a_{n,\,k} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．ここで，$a_{n,\,0} = 1$，$a_{n,\,-1} = 0$，$a_{n,\,n+1} = 0$ と定義すると，①は $0 \leqq k \leqq n+1$ の範囲で成り立つ．

以上から，

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,\,k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (2^n a_{n,\,k-1} + a_{n,\,k}) x^k \\
&= 2^n x \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,\,k-1} x^{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,\,k} x^k \\
&= 2^n x \sum_{k=0}^{n} a_{n,\,k} x^k + \sum_{k=0}^{n} a_{n,\,k} x^k \\
&= (2^n x + 1) f_n(x)
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{2^n x + 1}$$

次に，$X_{n+1,\ k}$ の要素を 2^0 が選ばれているか否かで 2 つに分けたとき，2^0 が選ばれているものの総和は $2^{k-1}a_{n,\ k-1}$，2^0 が選ばれていないものの総和は $2^k a_{n,\ k}$ であるから，

$$a_{n+1,\ k} = 2^{k-1}a_{n,\ k-1} + 2^k a_{n,\ k} \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立ち，$a_{n,\ 0} = 1$，$a_{n,-1} = 0$，$a_{n,\ n+1} = 0$ と定義すると，②は $0 \leqq k \leqq n+1$ の範囲で成り立つ．よって

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,\ k}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(2^{k-1}a_{n,\ k-1} + 2^k a_{n,\ k})x^k \\ &= x\sum_{k=0}^{n+1} a_{n,\ k-1}(2x)^{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,\ k}(2x)^k \\ &= x\sum_{k=0}^{n} a_{n,\ k}(2x)^k + \sum_{k=0}^{n} a_{n,\ k}(2x)^k \\ &= (x+1)f_n(2x) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = x+1$$

(3)　①, ② より

$$a_{n+1,\ k+1} = 2^n a_{n,\ k} + a_{n,\ k+1} \quad \cdots\cdots ①'$$

$$a_{n+1,\ k+1} = 2^k a_{n,\ k} + 2^{k+1}a_{n,\ k+1} \quad \cdots\cdots ②'$$

　$①' \times 2^{k+1} - ②'$ より

$$(2^{k+1}-1)a_{n+1,\ k+1} = 2^k(2^{n+1}-1)a_{n,\ k}$$

$$\frac{a_{n+1,\ k+1}}{a_{n,\ k}} = \frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}$$

第 5 問

点 $(x,\, y,\, z)$ の原点 O に関する位置ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表す．

点 $(0,\, 0,\, 2)$ を B とする．

S の底面上の点を $\mathrm{Q}(X,\, Y,\, 0)$ と表すと，このとき

$$X^2 + Y^2 \leqq 1 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす．

実数 λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ を用いて，S の側面上の点 P の位置ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \begin{pmatrix} \lambda X \\ \lambda Y \\ 2 - 2\lambda \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ②$$

と表せる．

(1)　$z = 1$ のとき，$\lambda = \dfrac{1}{2}$ であり，$x = \dfrac{1}{2}X$，$y = \dfrac{1}{2}Y$ となるから，①より，$z = 1$ 上における S の切り口は

$$x^2 + y^2 \leqq \frac{1}{4},\ z = 1$$

である．

また，実数 μ $(0 \leqq \mu \leqq 1)$ を用いて，T の側面上の点の位置ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} (1-\mu) + \mu X \\ \mu Y \\ 2 - 2\mu \end{pmatrix}$$

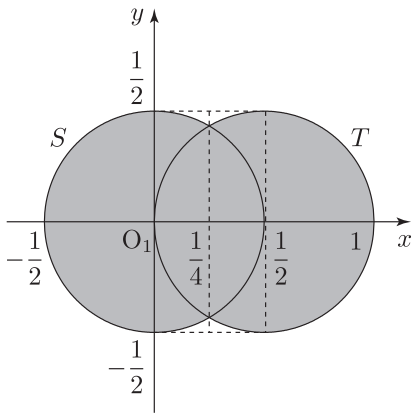
と表せる．

$z=1$ のとき，$\mu=\dfrac{1}{2}$ であり，
$x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}X$，$y=\dfrac{1}{2}Y$ となるから，
①より，$z=1$ 上における T の切り口は

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqq \frac{1}{4},\ z=1$$

である．

よって，平面 $z=1$ による S，T の切り口を図示すると，右図のようになる．ただし，O_1 は点 $(0,\ 0,\ 1)$ を表す．



(2) 線分 AP が通過する部分を U とする．

②より，実数 ν を用いて，U 上の点の位置ベクトルは，

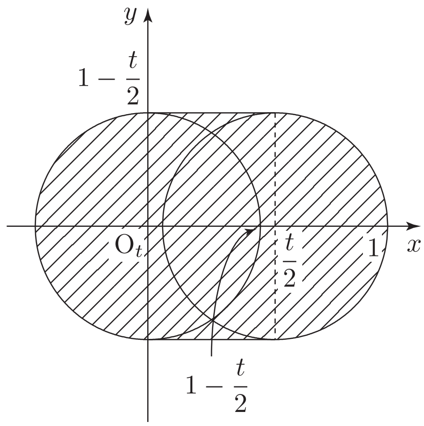
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\nu\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix} (1-\nu)+\lambda\nu X \\ \lambda\nu Y \\ 2-2\lambda\nu \end{pmatrix}$$

と表せる．

$z=t\ (0 \leqq t \leqq 2)$ のとき，$\lambda\nu = 1-\dfrac{t}{2}$ であり，①より，U の平面 $z=t$ における切り口は

$$\{x-(1-\nu)\}^2+y^2 \leqq \left(1-\frac{t}{2}\right)^2,\ z=t$$

である．



　線分 AP と平面 $z=t$ が共有点をもつとき，$1-\dfrac{t}{2} \leqq \lambda \leqq 1$ であり，ν は $1-\dfrac{t}{2} \leqq \nu \leqq 1$ を動くから，この円の中心 $(1-\nu,\ 0,\ t)$ の x 座標は $0 \leqq 1-\nu \leqq \dfrac{t}{2}$ の範囲を動く．このことに注意すると，U の平面 $z=t$ における切り口は右図のようになる．ただし，O_t は点 $(0,\ 0,\ t)$ を表す．

　この切り口の面積を $s(t)$ とおくと，

$$s(t)=\frac{t}{2}\cdot 2\left(1-\frac{t}{2}\right)+\pi\left(1-\frac{t}{2}\right)^2$$

であるから，求める体積は

$$\begin{aligned}\int_0^2 s(t)dt &= \frac{1}{2}\int_0^2 t(2-t)dt+\pi\int_0^2\left(1-\frac{t}{2}\right)^2 dt\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(2-0)^3-\frac{2}{3}\pi\left[\left(1-\frac{t}{2}\right)^3\right]_0^2\\ &= \frac{2}{3}+\frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

である．

第 6 問

(1)　$f(\theta) = A\sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha)$ とおく．$A > 1$ より

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = A - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) > 0$$

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -A - \sin\left(\frac{3}{4}\pi + \alpha\right) < 0$$

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = A - \sin\left(\frac{5}{4}\pi + \alpha\right) > 0$$

$$f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -A - \sin\left(\frac{7}{4}\pi + \alpha\right) < 0$$

であり，関数 $f(\theta)$ は連続な関数であるから，方程式 $f(\theta) = 0$ は $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$，$\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$ のそれぞれの範囲に少なくとも 1 個の解をもつ．

次に，$f(0) = f(2\pi) = -\sin\alpha$ である．$f(0) > 0$ と仮定すると，$\frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 1 個の解をもつ．$f(0) < 0$ ならば，$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲に少なくとも 1 個の解をもつ．最後に $f(0) = 0$ ならば，$\theta = 0$ が解である．よって，方程式 $f(\theta) = 0$ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつ．

(2)　$\mathrm{Q}(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$，
$\mathrm{P}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\cos p,\ u\sin p\right)\ (0 \leqq p < 2\pi,\ u \geqq 0)$ とおくことができる．

点 Q における C の接線の方程式は

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}x + (\sin\theta)y = 1$$

であるから，この接線の法線ベクトルを $\overrightarrow{v}$ とすると

$$\overrightarrow{v} = \left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}},\ \sin\theta\right)$$

である．また

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(\sqrt{2}\cos\theta - \frac{u}{\sqrt{2}}\cos p\ ,\ \ \sin\theta - u\sin p\right)$$

である．$\vec{v}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が平行であることから

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\cdot(\sin\theta - u\sin p) - \sin\theta\cdot\left(\sqrt{2}\cos\theta - \frac{u}{\sqrt{2}}\cos p\right) = 0$$

であり，三角関数の加法定理を用いて整理すると

$$\sin 2\theta - 2u\sin(\theta - p) = 0\ \cdots\cdots(*)$$

である．一方，(1) の $f(\theta)=0$ は，$A \neq 0$ より

$$\sin 2\theta - \frac{1}{A}\sin(\theta+\alpha) = 0$$

と変形できる．さらに，$A>1$ より $\dfrac{1}{A}<1$．(1) の α は任意の実数であるから，p の値によらず $2u<1$，すなわち $u<\dfrac{1}{2}$ のとき，θ の方程式 $(*)$ は少なくとも 4 個の解をもつ．よって，$r=\dfrac{1}{2}$ とすると，条件を満たすため，r の存在性が示された．

最後に，$r=\dfrac{1}{2}$ が条件をみたす r のうち最大になることを示す．$r>\dfrac{1}{2}$ とする．このとき，ある点 P に対して，対応する θ が 4 個未満になることを示せばよい．$u=\dfrac{1}{2}$，$p=\dfrac{3}{4}\pi$ のときを考える．これを $(*)$ に代入すると

$$\sin 2\theta - \sin\left(\theta - \frac{3}{4}\pi\right) = 0$$

である．和積の公式から

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{8}\pi\right)\cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{3}{8}\pi\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{8}\pi\right) = 0 \text{ または } \cos\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{3}{8}\pi\right) = 0$$

であり，$0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意すると

$$\frac{\theta}{2} + \frac{3}{8}\pi = \pi \text{ または } \frac{3}{2}\theta - \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi$$

$$\theta = \frac{7}{12}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{23}{12}\pi$$

である．このように θ の値が 3 個しかないため，$r > \frac{1}{2}$ のとき，条件をみたさない．したがって，r の最大値は $\underset{\sim\sim}{\frac{1}{2}}$ である．