1

(1) $\int f(x)dx = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

$= \log(e^x+1)+C$ （C:積分定数）

(2) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

よって点$(0, \frac{1}{2})$における接線lの方程式は，

$y = \frac{1}{4}(x-0)+\frac{1}{2}$

$\therefore\ y = \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

(3) Cとlを連立すると

$\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$ —— (*)

$g(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ とすると，

$g'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{1}{4} = \frac{-(e^x-1)^2}{4(e^x+1)^2} \leqq 0$

これより $y=g(x)$は減少関数である。

$g(0)=0$に注意すると $g(x)=0$ つまり (*)は

$x=0$のみを実数解にもつ。

よって曲線Cと接線lは点$(0, \frac{1}{2})$以外に共有点を

持たない。

(4) (3)より $x \geqq 0$のとき $g(x) \leqq 0$

これより $x \geqq 0$において $f(x) \leqq \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$が成り立つ。

また，点$(0, \frac{1}{2})$以外に曲線Cと接線lは共有点を

持たない。

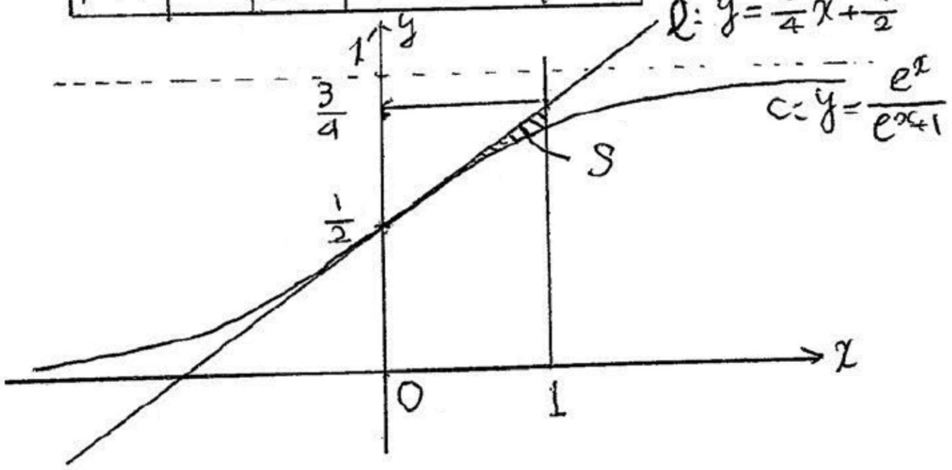
$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{e^x\cdot(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^2}$$

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1



求める面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot 1-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$=\frac{5}{8}-\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^1$$

$$=\frac{5}{8}-\log\frac{e+1}{2}$$

2

(1) $A(-2,0)$, $B(\cos\theta, \sin\theta)$

$C(3\cos 3\theta, 3\sin 3\theta)$　$(0 \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi)$

$$AB^2 = (\cos\theta + 2)^2 + (\sin\theta)^2$$
$$= 4\cos\theta + 5$$

$$BC^2 = (3\cos 3\theta - \cos\theta)^2 + (3\sin 3\theta - \sin\theta)^2$$
$$= 10 - 6(\cos 3\theta \cos\theta + \sin 3\theta \sin\theta)$$
$$= 10 - 6\cos(3\theta - \theta)$$
$$= 10 - 6\cos 2\theta$$
$$= 10 - 6(2\cos^2\theta - 1)$$
$$= -12\cos^2\theta + 16$$

(2) $$AB^2 + BC^2 = 4\cos\theta + 5 - 12\cos^2\theta + 16$$
$$= -12\cos^2\theta + 4\cos\theta + 21$$
$$= -12\left(\cos\theta - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{64}{3}$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$ より $-\frac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$ に注意すると,

$\cos\theta = \frac{1}{6}$ のとき $AB^2 + BC^2$ は最大値 $\frac{64}{3}$

このとき $\sin\theta = \frac{\sqrt{35}}{6}$ より 点Bの座標は $\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{6}\right)$

ここで $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
　　$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$　より

点Cのx座標 $= 3\cos\theta(4\cos^2\theta - 3) = -\frac{13}{9}$

点Cのy座標 $= 3\sin\theta(3 - 4\sin^2\theta) = -\frac{4\sqrt{35}}{9}$

よって点Cの座標は $\left(-\frac{13}{9}, -\frac{4\sqrt{35}}{9}\right)$

$\cos\theta = 1$ のとき　$AB^2 + BC^2$ は最小値 13

このとき $\sin\theta = 0$ より 点Bの座標は $(1, 0)$

また，$\theta = 0$ より 点Cの座標は $(3, 0)$

$\boxed{3}$

(1) $S: x^2+y^2+z^2+2x-10y+4z+21=0$

平方完成すると,

$$(x+1)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=9$$

これより. Sの中心の座標は$P(-1,5,-2)$,

半径は3である。

(2) $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ より

$$\overrightarrow{OD} = (1-s-t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$$

$$= (1-s-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-s-t \\ -s \\ -2t \end{pmatrix}$$

これより $D(1-s-t, -s, -2t)$

(3) $PD^2 = (2-s-t)^2 + (-s-5)^2 + (-2t+2)^2$

$$= 2s^2 + 2(t+3)s + 5t^2 - 12t + 33$$

$$= 2\left(s+\frac{t+3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}\left(t-\frac{5}{3}\right)^2 + 16$$

これより $s+\dfrac{t+3}{2}=0$ かつ $t-\dfrac{5}{3}=0$

つまり $s=-\dfrac{7}{3}$, $t=\dfrac{5}{3}$ のとき PDは最小値 4となる。

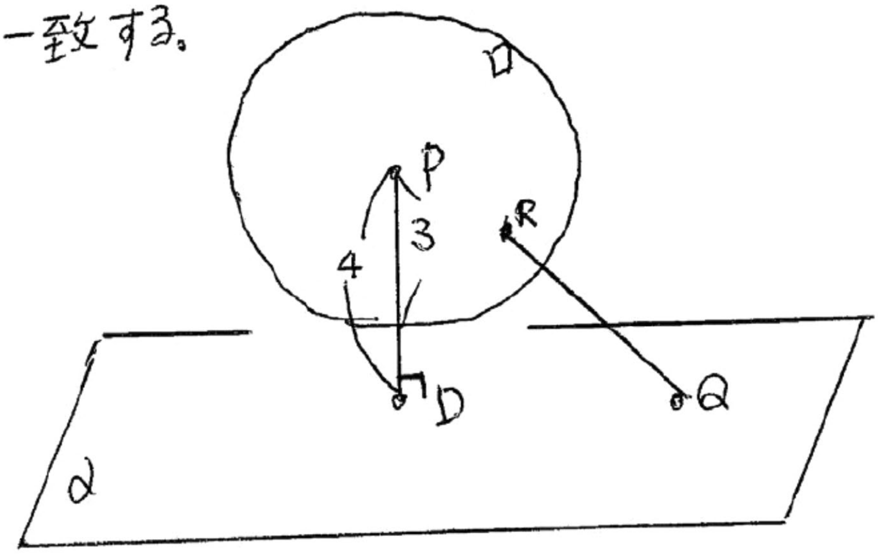
このとき $D\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{3}, -\dfrac{10}{3}\right)$

$$\overrightarrow{PD} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ である.

また，

$D\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{10}{3}\right)$ は P から平面 α に下ろした垂線の足

に一致する。



R を固定して Q を動かすと $RQ \perp$ 平面 α のとき QR の長さ

は最小となる。次に R を動かすと，3点 P, R, Q が

この順に同一直線上にきたとき，QR の長さは最小となる。

よって，求める QR の長さの最小値は $4-3=1$

このとき，Q と D は一致するので，$Q\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{10}{3}\right)$

また，$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

より，求める R の座標は $R(1, 3, -3)$

4

(1) $n=4,\ k=5$ のとき，

$a_1=0$ となるのは箱1に1個もボールが入らないときである。

よって，求める確率は $\left(\dfrac{4}{5}\right)^4=\dfrac{256}{625}$

(2) $a_1\times a_2=0$ となるのは $a_1=0$ または $a_2=0$ となる。

事象 A, B を次のように定める

A：箱1に1個もボールが入らない

B：箱2に1個もボールが入らない

求める確率 $P(A\cup B)$ は

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\
&=\left(\frac{k-1}{k}\right)^n+\left(\frac{k-1}{k}\right)^n-\left(\frac{k-2}{k}\right)^n\\
&=2\left(\frac{k-1}{k}\right)^n-\left(\frac{k-2}{k}\right)^n
\end{aligned}
$$

(3) $k=4$ のとき，

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\neq 0$ となるのは，

箱1～箱4の全ての箱に少なくとも1つ球が入るときである。

球の入れ方は全部で 4^n 通り

このうち，

空の箱が3個となるのは　4 通り ― ①

空の箱が2個となるのは　$(2^n-2)\times {}_4C_2$ 通り ― ②

空の箱が1個となるのは　$\{3^n-3\cdot(2^n-2)-3\}\times{}_4C_1$ 通り ― ③

① + ② + ③ より

$4\cdot3^n-6\cdot2^n+4$ 通り

よって，

$$P_n=\frac{4^n-(4\cdot 3^n-6\cdot 2^n+4)}{4^n}$$

$$=1-\frac{4\cdot 3^n-6\cdot 2^n+4}{4^n}$$

(3) $$P_{n+1}-P_n=\left(1-\frac{4\cdot 3^{n+1}-6\cdot 2^{n+1}+4}{4^{n+1}}\right)-\left(1-\frac{4\cdot 3^n-6\cdot 2^n+4}{4^n}\right)$$

$$=\frac{4\cdot 3^n-12\cdot 2^n+12}{4^{n+1}}$$ より

$$r^n(P_{n+1}-P_n)=\left(\frac{3}{4}r\right)^n-3\left(\frac{r}{2}\right)^n+3\left(\frac{r}{4}\right)^n$$

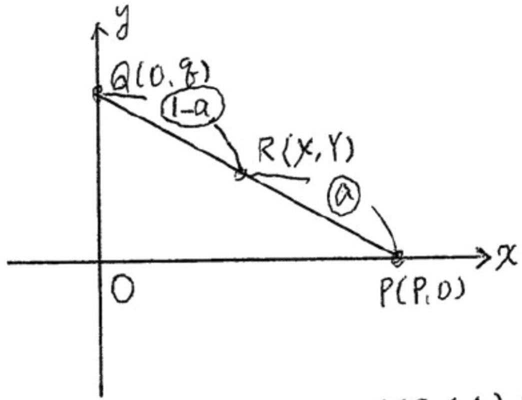
となる。$n\to\infty$ のとき $\{r^n(P_{n+1}-P_n)\}$ が収束する条件は

$0<\frac{3}{4}r\leqq 1$ かつ $0<\frac{r}{2}\leqq 1$ かつ $0<\frac{r}{4}\leqq 1$

となること．よって　$0<r\leqq\frac{4}{3}$

5

(1)



$P(p, 0)$, $Q(0, q)$ $(-4 \leqq p \leqq 4,\ -4 \leqq q \leqq 4)$ とおく。

ただし $PQ=4$ つまり $p^2+q^2=16$ ―― $(*)$

$R(X, Y)$ とすると、Rは線分PQを $a:(1-a)$ に内分するので

$$\begin{cases} X=(1-a)p \\ Y=aq \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p=\dfrac{X}{1-a} \\ q=\dfrac{Y}{a} \end{cases}$$

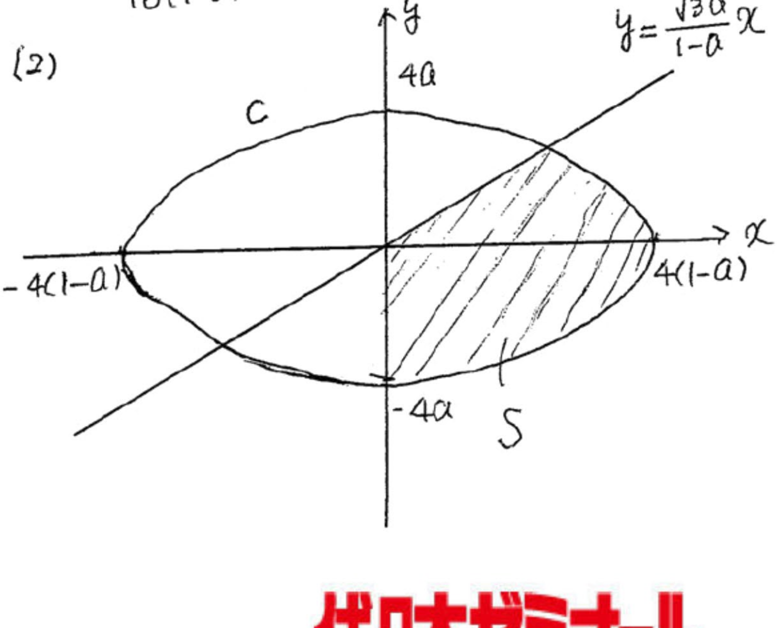
これを $(*)$ に代入して

$$\frac{X^2}{(1-a)^2}+\frac{Y^2}{a^2}=16$$

よって、だ円Cの方程式は

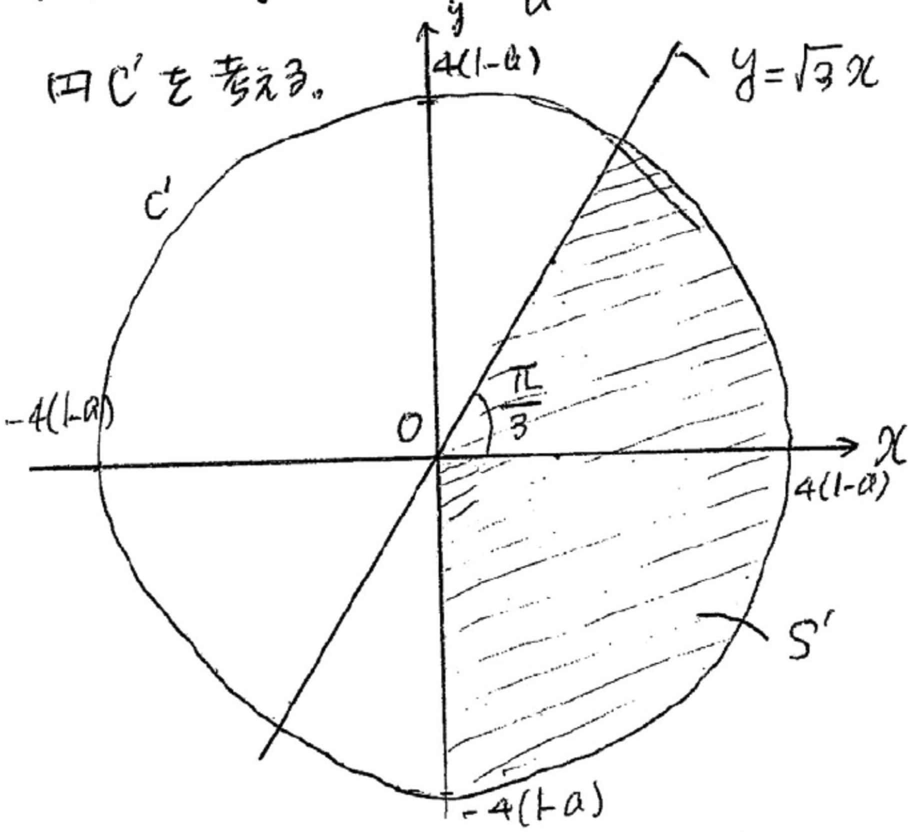
$$\frac{x^2}{16(1-a)^2}+\frac{y^2}{16a^2}=1$$

(2)



だ円Cをy軸方向に$\dfrac{1-a}{a}$倍した

円C'を考える。



上図の斜線部分の面積をS'とすると

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\{4(1-a)\}^2\cdot\frac{5}{6}\pi=\frac{20\pi}{3}(1-a)^2$$

よって．$S=\dfrac{a}{1-a}S'=\dfrac{20\pi}{3}a(1-a)$

(3) $S=\dfrac{20\pi}{3}\left\{-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right\}$　$(0<a<1)$

これより　$a=\dfrac{1}{2}$のとき　Sは最大値　$\dfrac{5}{3}\pi$

6

(1) $z^2-2t^3z+t^6+9t^2=0$

これを解くと $z=t^3\pm 3|t|i$

条件(Ⅰ)より zの虚部は0以上なので

$z=t^3+3|t|i$ —— ①

また，$w=i\bar{z}$

$=i(t^3-3|t|i)$

$=3|t|+t^3i$ —— ②

(2) $0\leqq t\leqq 2$ のとき，$|t|=t$ である。

これより $z=t^3+3ti$，$w=3t+t^3i$

$|z-w|=|(t^3-3t)+(3t-t^3)i|$

$=\sqrt{(t^3-3t)^2+(3t-t^3)^2}$

$=\sqrt{2}\,|t^3-3t|$

$f(t)=t^3-3t$ $(0\leqq t\leqq 2)$ とおくと，

$f'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$

$f(t)$の増減表は次のようになる。

t	0		1		2
$f'(t)$		$-$		$+$	
$f(t)$	0	↘	-2	↗	2

$t=1, 2$ のとき，$|z-w|$は最大値 $2\sqrt{2}$ をとる。

(3) $z=x+yi$ (x, y：実数) とおくと

①より $x+yi=t^3+3|t|i$

$\therefore \begin{cases} x=t^3 \\ y=3|t| \end{cases}$ —— ③

・$t \geqq 0$ のとき

③より $x = t^3,\ y = 3t$。t を消去して $x = \frac{1}{27}y^3$ $(x \geqq 0, y \geqq 0)$

・$t \leqq 0$ のとき

③より $x = t^3,\ y = -3t$，t を消去して $x = -\frac{1}{27}y^3$ $(x \leqq 0, y \geqq 0)$

同様に $w = x + yi$（x, y は実数）とおくと，

②より $x + yi = 3|t| + t^3 i$

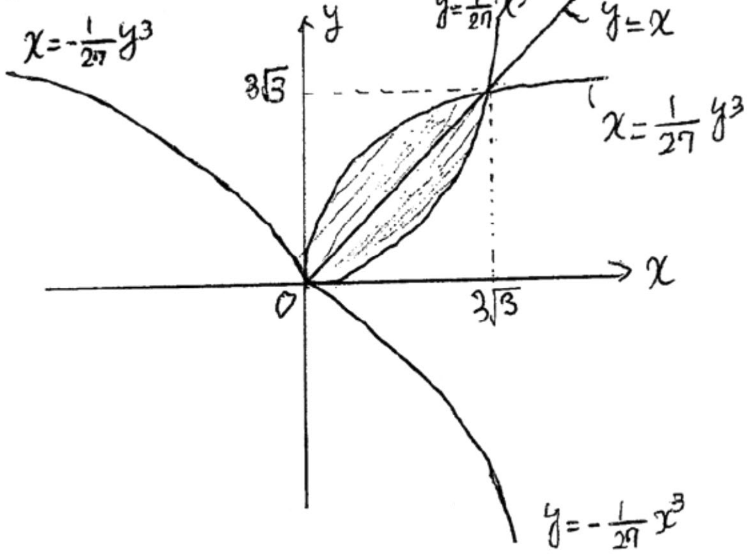
$$\begin{cases} x = 3|t| \\ y = t^3 \end{cases} \quad \text{―― ④}$$

・$t \geqq 0$ のとき

④より $x = 3t,\ y = t^3$。t を消去して $y = \frac{1}{27}x^3$ $(x \geqq 0, y \geqq 0)$

・$t \leqq 0$ のとき

④より $x = -3t,\ y = t^3$。t を消去して $y = -\frac{1}{27}x^3$ $(x \geqq 0, y \leqq 0)$



求める面積は上図の斜線部分であり 対称性より

$$S = 2\int_0^{3\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{27}x^3\right) dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{108}x^4\right]_0^{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{27}{2}$$