$\boxed{1}$ 解 答 （1） $x^3-3x^2-50=0$ より

$$(x-5)(x^2+2x+10)=0$$

x が実数のとき $x^2+2x+10=(x+1)^2+9>0$ であるから，実数解は $\boldsymbol{x=5}$ のみである．

（2） $p+q=pq=X$ であるから

$$p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)=\boldsymbol{X^3-3X^2}$$

（3） $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ より，$p+q=pq$ である．$p^3+q^3=50$ において（2）を用いて

$$X^3-3X^2=50 \qquad \therefore \quad X^3-3X^2-50=0$$

X は実数であるから，（1）より $X=5$ である．よって，$p+q=pq=5$ であるから，p，q は $t^2-5t+5=0$ の 2 解である．$t=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ と $p<q$ より

$$\boldsymbol{(p,\ q)=\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

これは $pq\neq 0$ を満たす．

$\boxed{2}$ 解答 （**1**） $y=-x^2+tx+t=-\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{t^2}{4}+t$ であるから，P の座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4}+t\right)}$ である．

（**2**） $l: y=\dfrac{t+4}{2}x$ であるから，C の式と連立して

$$\frac{t+4}{2}x=-x^2+tx+t$$

$$x^2+\frac{4-t}{2}x-t=0$$

$$\left(x-\frac{t}{2}\right)(x+2)=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{t}{2},\ -2$$

l と C が P 以外の共有点 Q をもつ条件は

$$\frac{t}{2}\neq -2 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{t\neq -4}$$

このとき，Q の座標は $\boldsymbol{(-2,\ -t-4)}$ である．

（**3**） $\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2=\left\{\left(\dfrac{t}{2}+1\right)^2+\left(\dfrac{t^2}{4}+t+2\right)^2\right\}-\{1+(t+2)^2\}$

$$=\frac{t^2}{4}+t+1+(X+2)^2-(t^2+4t+5)$$

$$=X+1+(X+2)^2-(4X+5)=\boldsymbol{X^2+X}$$

$\mathrm{AP}<\mathrm{AQ}$ とすると，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2<0$ であるから

$$X^2+X<0$$

$$X(X+1)<0$$

$$-1<X<0$$

$$-1<\frac{1}{4}t^2+t<0$$

$(t+2)^2>0$ かつ $t(t+4)<0$

$t\neq -2$ かつ $-4<t<0$ 　　$\therefore$ 　$\boldsymbol{-4<t<-2,\ -2<t<0}$

これは $t\neq -4$ を満たす．

$\boxed{3}$ **解答** （**1**）　表の出る回数は $n-r$ であるから

$$a_n = 2(n-r)+3r = \boldsymbol{2n+r}$$

（**2**）　表が出ることを○，裏が出ることを×と表す．

一般に，得点が 0 点でないのは $a_n = 2n+2$，すなわち $r=2$ のときである．$n=4$ のとき，○，×が 2 回ずつ起こる場合で，この確率は

$$ {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

得点が 25 になるときを調べる．○，×の順列で場合分けして得点を調べる．

○○××のとき，得点は $2+4+7+10=23$ である．

○×○×のとき，得点は $2+5+7+10=24$ である．

○××○のとき，得点は $2+5+8+10=25$ である．

×○○×のとき，得点は $3+5+7+10=25$ である．

×○×○のとき，得点は $3+5+8+10=26$ である．

××○○のとき，得点は $3+6+8+10=27$ である．

よって，適するのは 2 通りあるから，この確率は

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{16} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

（**3**）　2 回の×が x 回目と y 回目 $(1 \leqq x < y \leqq n)$ に出るとする．

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

とする．すべて○のとき，$a_k = 2k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であり

$$S = 2+4+\cdots+2n = n(n+1)$$

x 回目が×となると，$k=x,\ x+1,\ \cdots,\ n$ のときの a_k にすべて 1 が加算されるから，S は $n-x+1$ だけ増える．同様に，y 回目が×となると，S は $n-y+1$ だけ増える．よって

$$S = n(n+1)+(n-x+1)+(n-y+1)$$

このとき得点は S である．

$n=9$ のとき

$$S = 90+(10-x)+(10-y) = 110-(x+y)$$

$S=100$ とすると，$x+y=10$ であり

$$(x,\ y) = (1,\ 9),\ (2,\ 8),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6)$$

の 4 通りある．この確率は

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{2^9} = \boldsymbol{\frac{1}{128}}$$

S が奇数であるとすると，$x+y$ は奇数であり，x と y の偶奇は異なる．1 から 9 の自然数の中に奇数は 5 個，偶数は 4 個あるから，それぞれの中から 1 個ずつ選ぶ組合せを考えて，$(x,\ y)$ は $5\cdot4=20$ 通りある．この確率は

$$20\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{20}{2^9} = \boldsymbol{\frac{5}{128}}$$

✎注　（２）でも（３）と同様に考えると，$n=4$ のとき

$$S=20+(5-x)+(5-y)=30-(x+y)$$

$S=25$ とすると，$x+y=5$ であり

$$(x,\ y)=(1,\ 4),\ (2,\ 3)$$

の２通りある．