1 解答　（**1**）　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=\dfrac{x-2}{2x\sqrt{x}}$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$f(x)$ は表のように増減し，$x=2$ で**極小値** $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ をとる．

（**2**）　C の $x=u>0$ における接線の方程式は

$$y=\frac{u-2}{2u\sqrt{u}}(x-u)+\sqrt{u}+\frac{2}{\sqrt{u}}$$

$$y=\frac{u-2}{2u\sqrt{u}}x+\frac{u+6}{2\sqrt{u}}$$

これが $\mathrm{P}(t,\,0)$ を通る条件は

$$0=\frac{u-2}{2u\sqrt{u}}t+\frac{u+6}{2\sqrt{u}}$$

$$0=(u-2)t+u(u+6)\qquad\therefore\quad u^2+(t+6)u-2t=0\ \cdots\cdots\text{①}$$

これを満たす異なる $u>0$ がちょうど 2 個存在する．$g(u)=u^2+(t+6)u-2t$ とし，判別式を D とすると

$$D=(t+6)^2+8t=t^2+20t+36=(t+2)(t+18)>0\qquad\therefore\quad t<-18,\ -2<t$$

$$\text{軸}:u=-\frac{t+6}{2}>0\qquad\therefore\quad t<-6$$

$$g(0)=-2t>0\qquad\therefore\quad t<0$$

t の範囲は $\boldsymbol{t<-18}$ である．

（**3**）　$t<-18$ のとき，① の 2 解が α，β であるから，解と係数の関係を用いて

$$\alpha+\beta=-(t+6)\ \cdots\cdots\text{②}$$

$$\alpha\beta=-2t\ \cdots\cdots\text{③}$$

③－②×2 として

$$\alpha\beta-2(\alpha+\beta)=12\qquad\therefore\quad(\alpha-2)(\beta-2)=16$$

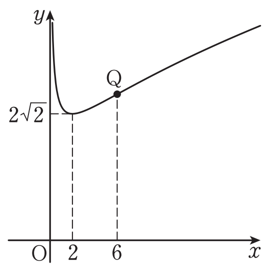
α，β が整数のとき，$1\leqq\alpha<\beta$ であるから，$-1\leqq\alpha-2<\beta-2$ であり

$$(\alpha-2,\,\beta-2)=(1,\,16),\,(2,\,8)\qquad\therefore\quad\boldsymbol{(\alpha,\,\beta)=(3,\,18),\,(4,\,10)}$$

注　C は図のようになり，接線と接点は 1 対 1 に対応する．なお，$\mathrm{Q}\left(6,\,\dfrac{8}{\sqrt{6}}\right)$ は変曲点であり，この点における接線の方程式は

$$y=\frac{1}{3\sqrt{6}}(x+18)$$

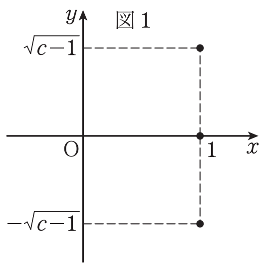
である．



$\boxed{2}$ **解答**　（1）　$P(z)=(z-1)(z^2-2z+c)$ である．$c>1$ に注意して，$P(z)=0$ とすると

$$z=1,\ 1\pm\sqrt{1-c}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{z=1,\ 1\pm\sqrt{c-1}\,i}$$

これを複素数平面上に図示すると，図 1 の 3 点になる．



（2）　$\alpha=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$\alpha\overline{\alpha}=1,\ \alpha^4=-1,\ \alpha^8=1$$

$w=\alpha z$ とおくと

$$Q(z)=-\alpha^4w^3+3\alpha^4w^2+(c+2)w-c=w^3-3w^2+(c+2)w-c=P(w)$$

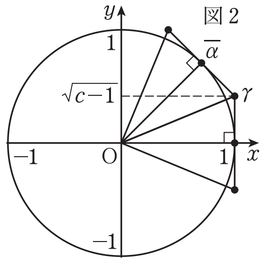
$Q(z)=0$ とすると，$P(w)=0$ である．（1）より $w=1,\ 1\pm\sqrt{c-1}\,i$ であり，また

$$z=\frac{w}{\alpha}=w\overline{\alpha}$$

より，z は w を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点であるから，実部が最大のものを γ とすると

$$\gamma=(1-\sqrt{c-1}\,i)\overline{\alpha}=(1-\sqrt{c-1}\,i)\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{c-1}+(1-\sqrt{c-1})i}{\sqrt{2}}}$$

（3）　$P(z)=0$ の 3 解はすべて実部が 1 である．$Q(z)=0$ の 3 解 $\overline{\alpha},\ (1\pm\sqrt{c-1}\,i)\overline{\alpha}$ のうち，$\overline{\alpha}$ と $(1+\sqrt{c-1}\,i)\overline{\alpha}$ の実部は 1 より小さいから，これらは共通解にならない．よって，共通解は γ である．実部が 1 であることから



$$\frac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}=1$$

$$\sqrt{c-1}=\sqrt{2}-1$$

$$c-1=(\sqrt{2}-1)^2\qquad\therefore\quad c=4-2\sqrt{2}$$

このとき $\gamma=1+\dfrac{1-(\sqrt{2}-1)i}{\sqrt{2}}=1+(\sqrt{2}-1)i=1+\sqrt{c-1}\,i$ であるから，γ は確かに共通解である．よって，$\boldsymbol{c=4-2\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{\beta=1+(\sqrt{2}-1)i}$ である．

3 解答 （1） $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\vec{b}|^2=\mathbf{3},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\vec{c}|^2=\mathbf{6},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\mathbf{2}$$

（2） $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=u\vec{b}+v\vec{c}$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\vec{b}+v\vec{c}$$

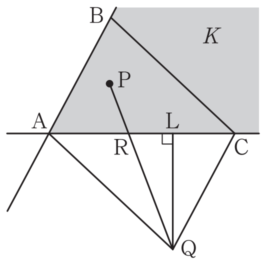
OQ $\perp$ 平面 H より OQ $\perp$ AB, OQ $\perp$ AC であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\vec{b}+v\vec{c})\cdot\vec{b}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\vec{b}+v\vec{c})\cdot\vec{c}=0$$

$$1+3u+2v=0,\ -4+2u+6v=0 \qquad \therefore\quad u=-1,\ v=1$$

よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$ である．

（3） K は図の網目部分である．ただし境界を含む．（2）より四角形 ABCQ は平行四辺形で，Q は AC に関して B と反対側，AB に関して C と同じ側にあるから，K 内の任意の点 P に対して，線分 PQ と半直線 AC は交点をもつ．それを R とすると，R は線分 QP 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$r$ は非負の実数）と書けるから，題意は示された．



別解　式で示す．線分 QP 上の点を X とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\quad(0\leqq k\leqq 1)$$

と書けて

$$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=(1-k)(-\vec{b}+\vec{c})+k(s\vec{b}+t\vec{c})=\{(s+1)k-1\}\vec{b}+\{(t-1)k+1\}\vec{c}$$

一方，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=r\vec{c}\,(r\geqq 0)$ である．X $=$ R とすると，係数を比べて

$$(s+1)k-1=0,\ (t-1)k+1=r \qquad \therefore\quad k=\frac{1}{s+1},\ r=\frac{s+t}{s+1}$$

$s\geqq 0$, $t\geqq 0$ であるから，$0\leqq k\leqq 1$, $r\geqq 0$ を満たす．よって，題意の点 R が存在する．

（4） 三平方の定理を用いると

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{OQ}^2+\mathrm{QP}^2}$$

であり，OQ は定数であるから，OP が最小になるのは QP が最小になるときである．（3）より，線分 PQ と半直線 AC は必ず交点をもつから，P が半直線 AC 上にある場合のみ考えれば十分である．Q から AC に下ろした垂線の足を L とする．$\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ への正射影ベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{\vec{c}\cdot(-\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{c}|^2}\vec{c}=\frac{4}{6}\vec{c}=\frac{2}{3}\vec{c}$$

L は半直線 AC 上にあるから，P ＝ L のとき QP は最小となる．よって，S ＝ L であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AS}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

S の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{11}{3}},\ \boldsymbol{\frac{1}{3}},\ \boldsymbol{\frac{5}{3}}\right)$ である．

4 解答　（1）　余事象を考える．赤玉を 1 回も取り出さない確率は $(1-p)^n$ であるから

$$\boldsymbol{f(1)=1-(1-p)^n}$$

赤玉をちょうど 1 回取り出す確率は ${}_n\mathrm{C}_1 p^1(1-p)^{n-1}=np(1-p)^{n-1}$ であるから

$$\boldsymbol{f(2)=1-(1-p)^n-np(1-p)^{n-1}}$$

（2）　$f(k)=\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\displaystyle\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$ ……………………………… ①

が成り立つことを k に関する数学的帰納法で示す．

$k=1$ のとき

$$(\text{① の右辺})=\frac{n!}{0!(n-1)!}\int_0^p x^0(1-x)^{n-1}\,dx=n\int_0^p(1-x)^{n-1}\,dx$$

$$=\Big[-(1-x)^n\Big]_0^p=1-(1-p)^n=f(1)=(\text{① の左辺})$$

であるから，① が成り立つ．

$k=l$ のとき ① が成り立つと仮定すると

$$f(l)=\frac{n!}{(l-1)!(n-l)!}\int_0^p x^{l-1}(1-x)^{n-l}\,dx=l\,{}_n\mathrm{C}_l\int_0^p x^{l-1}(1-x)^{n-l}\,dx$$

ただし，l は $1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ のいずれかである．部分積分を用いて

$$f(l)={}_n\mathrm{C}_l\int_0^p (x^l)'(1-x)^{n-l}\,dx$$

$$={}_n\mathrm{C}_l\left(\Big[x^l(1-x)^{n-l}\Big]_0^p-\int_0^p x^l\{(1-x)^{n-l}\}'\,dx\right)$$

$$={}_n\mathrm{C}_l\left\{p^l(1-p)^{n-l}+(n-l)\int_0^p x^l(1-x)^{n-l-1}\,dx\right\}$$

$$={}_n\mathrm{C}_l\,p^l(1-p)^{n-l}+\frac{n!}{l!(n-l-1)!}\int_0^p x^l(1-x)^{n-l-1}\,dx$$

$f(l+1)$ は $f(l)$ から赤玉がちょうど l 回取り出される確率を引いたもので

$$f(l+1)=f(l)-{}_n\mathrm{C}_l\,p^l(1-p)^{n-l}=\frac{n!}{l!(n-l-1)!}\int_0^p x^l(1-x)^{n-l-1}\,dx$$

よって，$k=l+1$ のときも ① が成り立つ．

以上より，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，① が成り立つ．

（3）　① において，$p=\dfrac{1}{2}$，$n=2k-1$ として

$$f(k)=\frac{(2k-1)!}{(k-1)!(k-1)!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1}(1-x)^{k-1}\,dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$n=2k-1$ のとき，$f(k)$ は $2k-1$ 回中 k 回以上赤玉が出る確率である．一方，$p=\dfrac{1}{2}$ より，赤玉と白玉は対等であるから，$2k-1$ 回中 k 回以上白玉が出る確率，すなわち赤玉が $k-1$ 回

以下しか出ない確率も $f(k)$ である．これら 2 つの確率の和は 1 であるから

$$f(k)+f(k)=1 \qquad \therefore \quad f(k)=\frac{1}{2}$$

② で k の代わりに $k+1$ として

$$\frac{1}{2}=\frac{(2k+1)!}{k!k!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx \qquad \therefore \quad \boldsymbol{I=\frac{(k!)^2}{2(2k+1)!}}$$