$\boxed{1}$

■解答例□

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6(2+\sin a)x + 12\sin a \\ &= 6(x-2)(x-\sin a) \end{aligned}$$

$\sin a < 2$ により，$f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	$\cdots$	$\sin a$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より，$f(x)$ はただ 1 つの極大値をもつ．さらにその値は，

$$\begin{aligned} M(a) = f(\sin a) &= 2\sin^3 a - (6+3\sin a)\sin^2 a + 12\sin^2 a + \sin^3 a + 6\sin a + 5 \\ &= 6\sin^2 a + 6\sin a + 5 \end{aligned}$$

である．

(2)

$t = \sin a$ とおくと，$0 \leqq a < 2\pi$ より $t(=\sin a)$ のとりうる値の範囲は $-1 \leqq t \leqq 1$ である．(1) より，

$$\begin{aligned} M(a) &= 6t^2 + 6t + 5 \\ &= 6\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \ (= g(t) \text{ とする}) \end{aligned}$$

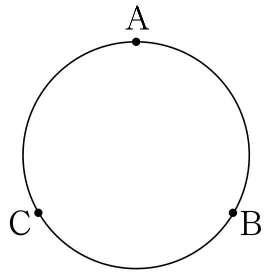
となる．

$M(a)(=g(t))$ の最大値，最小値はそれぞれ $g(1) = 17$，$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$ となる．最大値を与える t の値は $t = 1$ なので，これを与える a の値は，$\sin a = 1$ かつ $0 \leqq a < 2\pi$ より $a = \frac{\pi}{2}$ である．最小値を与える t の値は $t = -\frac{1}{2}$ なので，これを与える a の値は，$\sin a = -\frac{1}{2}$ かつ $0 \leqq a < 2\pi$ より $a = \frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$ である．

$\boxed{2}$

1 個のさいころを投げての点の移動は次のようになる.

出た目	Q の移動	確率
1	時計回りに隣の点	$\frac{1}{6}$
2	反時計回りに隣の点	$\frac{1}{6}$
3, 4, 5, 6	移動しない	$\frac{2}{3}$



さいころを n 回投げたあとに Q が A，B，C に位置する確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とすると

$$p_n + q_n + r_n = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$p_1 = \frac{2}{3}$$

さいころを投げての点の移動を → で表すとする.

(1)　さいころを 2 回投げて Q が A に位置するのは

A → B → A または A → C → A または A → A → A

であるから

$$p_2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2)　さいころを $(n+1)$ 回投げたあとに Q が A に位置するのは

あ さいころを n 回投げたあとに Q が A に位置する　かつ　A → A

い さいころを n 回投げたあとに Q が B に位置する　かつ　B → A

う さいころを n 回投げたあとに Q が C に位置する　かつ　C → A

あ，い，う より

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n \\ &= \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}(q_n + r_n) \\ &= \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n) \quad (\because ①) \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}}$

(3)　変形して　$p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$

$\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって　$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1\right\}}$

$\boxed{3}$

$\boxed{\text{解答}}$ $\angle\mathbf{ABC} = \theta$ とおく.

$$\begin{aligned}\pi &= \angle\mathbf{BAC} + \angle\mathbf{ABC} + \angle\mathbf{ACB}\\ &> 0 + \theta + 3\theta\\ &= 4\theta\end{aligned}$$

であるから,

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

を満たす.

三角形 **ABC** に正弦定理を用いると,

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{c}{\sin 3\theta}$$

であり, これより,

$$\begin{aligned}c &= \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}b\\ &= \frac{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}{\sin\theta}b \quad (\text{「3 倍角の公式」より})\\ &= (3 - 4\sin^2\theta)b\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}3b - c &= 3b - (3 - 4\sin^2\theta)b\\ &= 4b\sin^2\theta\\ &> 0\end{aligned}$$

となり, 問題で与えられた命題は示された.