

1

$$(1) \quad f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos \frac{x}{3} \text{ より,}$$

$$f'_n(x) = -\frac{n}{2}e^{nx} - \frac{1}{3}\sin \frac{x}{3} = -\frac{3ne^{nx} + 2\sin \frac{x}{3}}{6}$$

n は自然数で, $x \geq 0$ より

$$3ne^{nx} \geq 3ne^0 \geq 3$$

であり, さらに, $-2 \leq 2\sin \frac{x}{3} \leq 2$ であるので

$$3ne^{nx} + 2\sin \frac{x}{3} > 0$$

よって, $x \geq 0$ において, 常に $f'_n(x) < 0$ であるから関数 $f_n(x)$ は単調に減少する.

そして,

$$f_n(0) = 1 - \frac{1}{2}e^0 + \cos 0 = 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$f_n(2\pi) = 1 - \frac{1}{2}e^{2n\pi} + \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{e^{2n\pi} - 1}{2} \leq -\frac{e^{2\pi} - 1}{2} < 0$$

より, $y = f_n(x)$ のグラフは x 軸とただ 1 点で交わることがわかる.

したがって, 方程式 $f_n(x) = 0$ は, ただ 1 つの実数解をもつことが示された.

【証明終了】

$$(2) \quad f_n\left(\frac{1}{n}\log 4\right) = 1 - \frac{1}{2}e^{\log 4} + \cos \frac{\log 4}{3n} = -1 + \cos \frac{\log 4}{3n} \leq 0 \text{ より, } 0 < a_n \leq \frac{1}{n}\log 4 \text{ とわかる.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\log 4 = 0$$

であるから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \cdots (\text{答})$$

$$(3) \quad a_n \text{ は方程式 } f_n(x) = 0 \text{ の実数解であるから}$$

$$1 - \frac{1}{2}e^{na_n} + \cos \frac{a_n}{3} = 0$$

$$\frac{1}{2}e^{na_n} = 1 + \cos \frac{a_n}{3}$$

$$e^{na_n} = 2\left(1 + \cos \frac{a_n}{3}\right)$$

ここで, $0 < a_n < 2\pi$ より $0 < \frac{a_n}{3} < \frac{2}{3}\pi$ であるから, $1 + \cos \frac{a_n}{3} > 0$ であるので

$$na_n = \log \left\{ 2\left(1 + \cos \frac{a_n}{3}\right) \right\}$$

よって, (2) の結果を用いることにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ 2\left(1 + \cos \frac{a_n}{3}\right) \right\} = \log \{2(1 + \cos 0)\} = \log 4 \cdots (\text{答})$$

2

$w_1 = f(1) - 3, w_2 = f(i) - 1$ とおくと, w_1, w_2 の動きうる範囲は

$$|w_1| \leq 1, \quad |w_2| \leq 3$$

である.

また,

$$\begin{cases} w_1 = f(1) - 3 = -2 + \alpha + \beta \\ w_2 = f(i) - 1 = -2 + \alpha i + \beta \end{cases}$$

であり, これを α, β の連立方程式と見て解くと,

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1+i}{2}w_1 - \frac{1+i}{2}w_2 \\ \beta = 2 + \frac{1-i}{2}w_1 + \frac{1+i}{2}w_2 \end{cases}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} f(1+i) &= (1+i)^2 + \alpha(1+i) + \beta \\ &= 2i + (1+i) \cdot \left(\frac{1+i}{2}w_1 - \frac{1+i}{2}w_2 \right) + 2 + \frac{1-i}{2}w_1 + \frac{1+i}{2}w_2 \\ &= 2 + 2i + \frac{1+i}{2}w_1 + \frac{1-i}{2}w_2 \\ &= 2 + 2i + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) w_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\} w_2 \end{aligned}$$

であり,

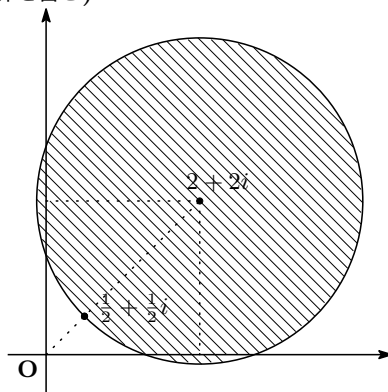
$$\begin{cases} w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) w_1 \\ w_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\} w_2 \end{cases}$$

とおくと,

$$f(1+i) = (2+2i+w_4) + w_3$$

となる.

- (1) $2+2i+w_4$ は, 複素数平面上において, $2+2i$ を中心とする半径 $\frac{3}{\sqrt{2}}$ の円の周または内部を動くので, $2+2i+w_4$ の動きうる範囲を図示すると, 以下の斜線部分になる (境界を含む).



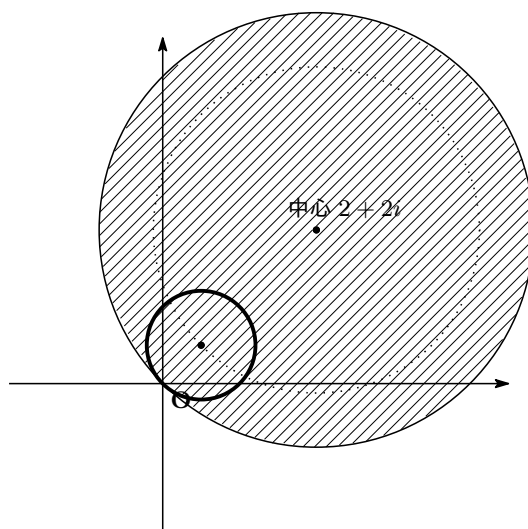
次に, w_3 は, 複素数平面上において, 0 を中心とする半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円の周または内部を動く.

よって, $2+2i+w_4$ を固定すると, 点 $f(1+i) = (2+2i+w_4) + w_3$ が動きうる範囲は, 点 $2+2i+w_4$ を中心とする半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円の内部または周である.

これに $2+2i+w_4$ の動きうる範囲を考慮に入れると, $f(1+i)$ の取りうる値の範囲は

$$|f(1+i) - (2+2i)| \leq 2\sqrt{2}$$

であり, $f(1+i)$ の動きうる範囲を図示すると, 下図の斜線部分になる (境界を含む).



(2) (1) の議論より,

$$\begin{aligned} |f(1+i)| &= |(2+2i+w_4)+w_3| \\ &\geq |2+2i+w_4| - |w_3| \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり, この等号成立条件は

$$\begin{cases} w_3, 0, 2+2i+w_4 \text{がこの順に一直線上にあり} \\ \text{かつ} \\ |2+2i+w_4| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{かつ } |w_3| = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

すなわち

$$2+2i+w_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ かつ } w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

となり, ここから, $w_3, w_4, w_1, w_2, \alpha, \beta$ の順に求めると,

$$\begin{cases} \alpha = -2+i \\ \beta = 3-i \end{cases}$$

が得られる.

以上より, $f(1+i) = 0$ を満たす α, β は

$$\begin{cases} \alpha = -2+i \\ \beta = 3-i \end{cases}$$

3

座標空間において考える.

原点を通り, 方向ベクトルが $(1, 0, 0)$ となる直線を ℓ としても一般性は失われないので, 直線 ℓ をそのように定める.

点 (a_1, a_2, a_3) を通り, 方向ベクトルが (d_1, d_2, d_3) となる直線を m とすると, 直線 m のベクトル方程式は実数 t を用いて,

$$(a_1, a_2, a_3) + t(d_1, d_2, d_3) = (a_1 + td_1, a_2 + td_2, a_3 + td_3) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表される.

ここで, 2 直線 ℓ, m はねじれの位置にあることから, 2 直線 ℓ, m の方向ベクトルは平行とはならないので,

$$(d_2, d_3) \neq (0, 0) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ. また, 交点も持つことはないので, $\textcircled{1}$ より, すべての実数 t について,

$$(a_2 + td_2, a_3 + td_3) \neq (0, 0)$$

が成り立つ.

さて, 直線 ℓ と直交する直線の方向ベクトルは実数 y, z を用いて, $(0, y, z)$ と表される. また, この直線は ℓ と直交することからこれと ℓ との交点は x 軸上にある. これを点 $(b_1, 0, 0)$ とする. これより, 直線 ℓ と直交する直線のベクトル方程式は実数 s を用いて,

$$(b_1, 0, 0) + s(0, y, z) = (b_1, sy, sz) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

と表される. よって, この直線と直線 m が直交するためには,

$$(d_1, d_2, d_3) \cdot (0, y, z) = 0 \quad \text{すなわち} \quad d_2y + d_3z = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

が成り立つ必要がある.

(i) $d_2 = 0$ のとき

$\textcircled{4}$ は $d_3z = 0$ となり, $\textcircled{2}$ より, $d_3 \neq 0$ であるから, $z = 0$ を得るので, ℓ と m の両方に直交する直線と m との交点を考えて, $\textcircled{1}, \textcircled{3}$ から,

$$a_1 + td_1 = b_1 \quad \text{かつ} \quad a_2 = sy \quad \text{かつ} \quad a_3 + td_3 = 0$$

となる. よって, $t = -\frac{a_3}{d_3}$, $b_1 = a_1 - \frac{d_1}{d_3}a_3$ となるので, $\textcircled{3}$ は

$$\left(a_1 - \frac{d_1}{d_3}a_3, 0, 0\right) + sy(0, 1, 0)$$

となり, このような直線は直線 m に対して一通りに定まる.

(ii) $d_2 \neq 0$ のとき

$\textcircled{4}$ より, $y = -\frac{d_3}{d_2}z$ となるので, 先ほどと同様に考えると, $\textcircled{1}, \textcircled{3}$ から,

$$a_1 + td_1 = b_1 \quad \text{かつ} \quad a_2 + td_2 = -\frac{d_3}{d_2}sz \quad \text{かつ} \quad a_3 + td_3 = sz$$

となる． よって， $t = -\frac{a_2d_2 + a_3d_3}{d_2^2 + d_3^2}$ ， $b_1 = a_1 - \frac{a_2d_2 + a_3d_3}{d_2^2 + d_3^2}d_1$ となるので， ③は

$$\left(a_1 - \frac{a_2d_2 + a_3d_3}{d_2^2 + d_3^2}d_1, 0, 0 \right) + sz \left(0, -\frac{d_3}{d_2}, 1 \right)$$

となり， このような直線は直線 m に対して一通りに定まる．

以上 (i)， (ii) より， ℓ と m の両方に直交する直線がただ 1 つ存在する．

(証明了)

4 $C: (x-a)^2 + y^2 = 1 \ (a > 1)$

(1) C について

$$x = a \pm \sqrt{1-y^2}$$

$$x \geq a \text{ の部分は } x = a + \sqrt{1-y^2}$$

円 C の $x \geq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y = 1$, $y = -1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 は

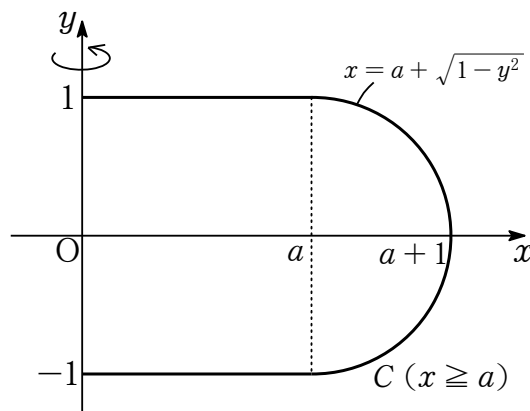
$$V_1 = \int_{-1}^1 \pi x^2 dy = 2\pi \int_0^1 (a + \sqrt{1-y^2})^2 dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (a^2 + 1 - y^2 + 2a\sqrt{1-y^2}) dy$$

$$= 2\pi \left\{ \left[(a^2 + 1)y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 + 2a \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{4} \right\}$$

$$= 2\pi \left(a^2 + \frac{\pi}{2}a + \frac{2}{3} \right)$$

$$= \underline{\underline{2\pi a^2 + \pi^2 a + \frac{4}{3}\pi}}$$



(2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とするので

$$V_2 = \int_{-1}^1 \pi \{ (a + \sqrt{1-y^2})^2 - (a - \sqrt{1-y^2})^2 \} dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 \{ (a + \sqrt{1-y^2})^2 - (a - \sqrt{1-y^2})^2 \} dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 4a\sqrt{1-y^2} dy$$

$$= 2\pi \cdot 4a \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= 2\pi^2 a$$

$V_1 = 2V_2$ となるのは

$$2\pi \left(a^2 + \frac{\pi}{2}a + \frac{2}{3} \right) = 4\pi^2 a$$

$$\text{すなわち } 6a^2 - 9\pi a + 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{*}$$

$$\therefore a = \frac{9\pi \pm \sqrt{81\pi^2 - 96}}{12}$$

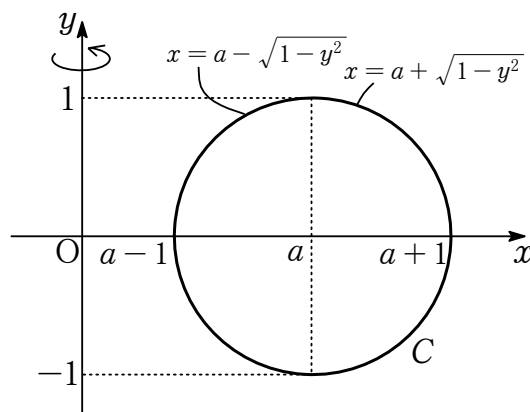
ここで, $\alpha = \frac{9\pi - \sqrt{81\pi^2 - 96}}{12}$, $\beta = \frac{9\pi + \sqrt{81\pi^2 - 96}}{12}$ とおいて, $\textcircled{*}$ で解と係数の関係を用いると

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{3}{2}\pi \\ \alpha\beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

となることから $\alpha + \beta > 2$ かつ $0 < \alpha\beta < 1$ である.

これより $0 < \alpha < 1 < \beta$

$$\text{よって, } a > 1 \text{ であることから } \underline{\underline{a = \frac{9\pi + \sqrt{81\pi^2 - 96}}{12}}}$$



5 (1) $p^a q^b r^c$ 以下の自然数の集合を全体集合 $\mathcal{U}$ とし、 $\mathcal{U}$ の部分集合 P, Q, R はそれぞれ p, q, r で割り切れる自然数の集合であるとする。

$$\begin{aligned} n(P) &= p^a q^b r^c \div p \\ &= p^{a-1} q^b r^c \end{aligned}$$

であり、同様に $n(Q) = p^a q^{b-1} r^c$, $n(R) = p^a q^b r^{c-1}$ である。また

$$\begin{aligned} n(P \cap Q) &= p^a q^b r^c \div pq \\ &= p^{a-1} q^{b-1} r^c \end{aligned}$$

であり、同様に $n(Q \cap R) = p^a q^{b-1} r^{c-1}$, $n(R \cap P) = p^{a-1} q^b r^{c-1}$ であり、

$$\begin{aligned} n(P \cap Q \cap R) &= p^a q^b r^c \div pqr \\ &= p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \sharp(p^a q^b r^c) &= n(\overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R}) \\ &= n(\overline{P \cup Q \cup R}) = n(\mathcal{U}) - n(P \cup Q \cup R) \\ &= n(\mathcal{U}) - (n(P) + n(Q) + n(R) \\ &\quad - n(P \cap Q) - n(Q \cap R) - n(R \cap P) \\ &\quad + n(P \cap Q \cap R)) \\ &= p^a q^b r^c - p^{a-1} q^b r^c - p^a q^{b-1} r^c - p^a q^b r^{c-1} \\ &\quad + p^{a-1} q^{b-1} r^c + p^a q^{b-1} r^{c-1} + p^{a-1} q^b r^{c-1} \\ &\quad - p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} \\
&\quad \times (pqr - qr - rp - pq + r + p + q - 1) \\
&= p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

(2) 5以上 100以下の自然数 n のもつ素因数の個数を N_n とし、 $N_n \geq 4 \dots \textcircled{1}$ を仮定すると、 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} p_4^{a_4} \dots p_{N_n}^{a_{N_n}}$ と表せる。ただし、 $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_{N_n}$ は相異なる素数 $\dots \textcircled{2}$ 、 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{N_n}$ は自然数 $\dots \textcircled{3}$ である。すると、

$$\begin{aligned}
n &\geq p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} p_4^{a_4} \quad (\because \textcircled{1}) \\
&\geq 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \quad (\because \textcircled{2} \text{ か } \textcircled{3}) \\
&= 210
\end{aligned}$$

と矛盾。これは n が 100以下であることと矛盾する。よって $N_n \leq 3$ である。

「 $f(n)$ が n の約数となる」という条件を (C) とする。

(i) $N_n = 1$ のとき

$n = p^a$ (p は素数、かつ a は自然数) と表せて、(1) と同様に考えると $f(p^a) = p^{a-1}(p-1)$ となる。よって、

$$(C) \Leftrightarrow p^{a-1}(p-1) \text{ が } p^a \text{ の約数となる}$$

$$\Leftrightarrow p-1 \text{ が } p \text{ の約数となる} \dots \textcircled{4}$$

となる。 p が奇数の素数のとき $p-1$ は偶数なので $\textcircled{4}$ を満たさない。よって $\textcircled{4}$ を満たす素数 p は $p=2$ である。

以上より (c) を満たす m は $m = 2^a$ (a は自然数) と表せて、これを満たす 5 以上 100 以下の自然数は 8, 16, 32, 64 である。

(ii) $N_m = 2$ のとき

$m = p^a q^b$ (p, q は素数, $p < q$, a, b は自然数) と表せて、(i) と同様に考えると $\phi(p^a q^b) = p^{a-1} q^{b-1} (p-1)(q-1)$ となる。よって、

(c) $\Leftrightarrow p^{a-1} q^{b-1} (p-1)(q-1)$ が $p^a q^b$ の約数となる

$\Leftrightarrow (p-1)(q-1)$ が pq の約数となる ... ⑤

となる。

(1) $p = 2$ のとき, $m = 2^a q^b$ となり, $m \leq 100$ かつ (2) $\Rightarrow p < q$ をふまえると, 素数 q は $q = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 \dots$ ⑥ であることが必要。そして、

⑤ $\Leftrightarrow q-1$ が $2q$ の約数となる ... ⑤'

となるが, ⑥ で列挙した q のうち ⑤' を満たすものは $q = 3$ 以外に存在しない。

(2) $p \geq 3$ のとき, (3) $\Rightarrow p < q$ を満たす素数 p, q はともに奇数。よって $(p-1)(q-1)$ が偶数, pq が奇数となり, ⑤ を満たさない。

以上より (c) を満たす m は $m = 2^a 3^b$ (a, b は自然数) と表せて、これを満たす 5 以上 100 以下の自然数は 6, 18, 54, 12, 36, 24, 72, 48, 96 である。

(iii) $N_m = 3$ のとき

$m = p^a q^b r^c$ (p, q, r は素数, $p < q < r$, a, b, c は自然数)

と表せて, (1)より $f(p^a q^b r^c) = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$ であつたから,

(C) $\Leftrightarrow p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$ が $p^a q^b r^c$ の約数となる

$\Leftrightarrow (p-1)(q-1)(r-1)$ が pqr の約数となる... ⑦
とよぶ.

(11) $p=2$ のとき, $m=2^a q^b r^c$ とよび, $m \leq 100$ から $(2=) p < q < r$ をふまえると, 素数 q, r の組 (q, r) は $(q, r) = (3, 5), (3, 7), (3, 11), (3, 13), (5, 7) \dots$ ⑧ であることが必要. して,

⑦ $\Leftrightarrow (q-1)(r-1)$ が $2qr$ の約数となる... ⑦'

とよぶが, ⑧ で列挙した (q, r) はどれも ⑦' を満たさない.

(12) $p \geq 3$ のとき, (10) のときと同様に考え, $(p-1)(q-1)(r-1)$ が偶数, pqr が奇数であることから ⑦ を満たさない.

(i) ~ (iii) より, 求める m は

$m = 6, 8, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 96$
である.