１.

■解答例□

(1) $f\,(x)$ を $(x-p)^2=x^2-2px+p^2$ で割ると次のようになる.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x & +a+2p & & \\ \hline
x^2-2px+p^2 & x^3 & +ax^2 & +bx & +c \\
 & x^3 & -2px^2 & +p^2x & \\ \hline
 & & (a+2p)\,x^2 & +(b-p^2)\,x & +c \\
 & & (a+2p)\,x^2 & -(2ap+4p^2)\,x & +ap^2+2p^3 \\ \hline
 & & & (b+2ap+3p^2)\,x & +c-ap^2-2p^3
\end{array}
$$

余りが 0 になるので，$(b+2ap+3p^2)\,x+c-ap^2-2p^3=0$

すなわち，$\begin{cases} b+2ap+3p^2=0 \\ c-ap^2-2p^3=0 \end{cases}$

よって　$\boldsymbol{b=-3p^2-2ap}$，$\boldsymbol{c=2p^3+ap^2}$

(2)
$$f'\,(x)=3x^2+2ax+b$$
$$f'\left(p+\frac{4}{3}\right)=3\left(p+\frac{4}{3}\right)^2+2a\left(p+\frac{4}{3}\right)-3p^2-2ap=\frac{8}{3}\,(3p+a+2)$$

$f'\left(p+\dfrac{4}{3}\right)=0$ をみたすので，$\boldsymbol{a=-3p-2}$

(3) (2) の条件のもとで，$p=0$ とすると

$a=-2$，$b=0$，$c=0$

$f\,(x)=x^3-2x^2$

$f'\,(x)=3x^2-4x$

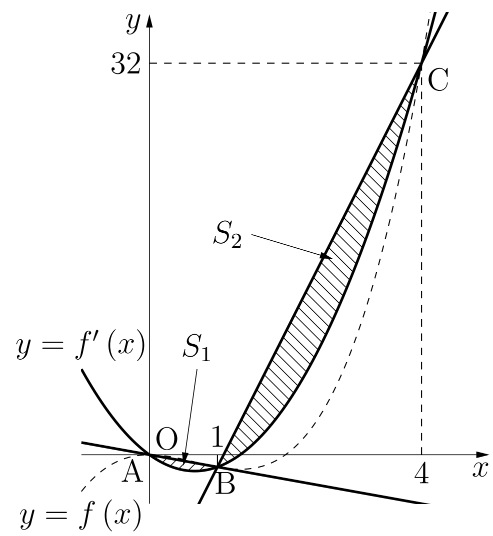
$f\,(x)=f'\,(x)$ とすると，$x^3-5x^2+4x=0$

すなわち，$x\,(x-1)\,(x-4)=0$　$\therefore\ x=0$，1，4

A(0, 0)，B(1, −1)，C(4, 32) であり，

直線 AB : $y=-x$

直線 BC : $y=11x-12$

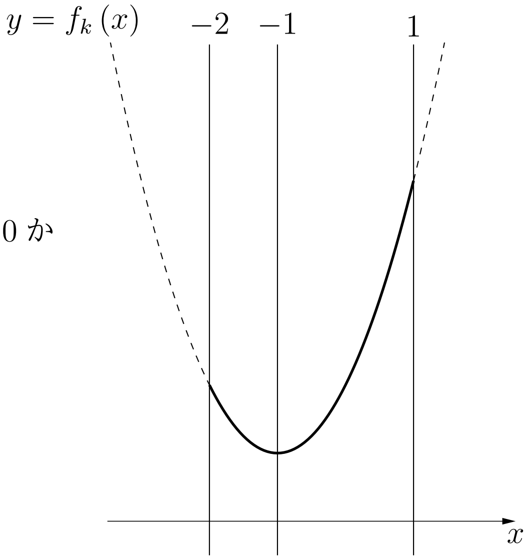


$$S_1=\int_0^1\{-x-(3x^2-4x)\}\,dx$$
$$=-3\int_0^1 x\,(x-1)\,dx=\frac{3}{6}\,(1-0)^3=\frac{1}{2}$$
$$S_2=\int_1^4\{11x-12-(3x^2-4x)\}\,dx$$
$$=-3\int_1^4 (x-1)\,(x-4)\,dx=\frac{3}{6}\,(4-1)^3=\frac{27}{2}$$

よって　$S_1+S_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{27}{2}=\boldsymbol{14}$

２．

■解答例□



(1) すべての自然数 n で

$$a_n>0 \quad \text{かつ} \quad b_n>0 \ \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(A) $n=1$ のとき．条件 (i) より，$(*)$ が成り立つ．

(B) $n=k$ （k は自然数）で $(*)$ の成立，すなわち $a_k>0$ かつ $b_k>0$ を仮定すると，すべての実数 x に対して，

$$f_k(x)=a_k(x+1)^2+2b_k>0$$

が成り立つ．2 次関数 $y=f_k(x)$ のグラフより，$-2 \leqq x \leqq 1$ に注意すると，

$$a_{k+1}=f_k(1)=4a_k+2b_k>0$$

かつ

$$b_{k+1}=f_k(-1)=2b_k>0$$

が成り立つ．よって，$n=k+1$ で $(*)$ が成り立つ．

以上 (A)，(B) より，すべての自然数 n で $a_n>0$ かつ $b_n>0$ が成り立つ．

(証明了)

(2) (1) の結果より，

$$\begin{cases} a_{n+1}=f_n(1)=4a_n+2b_n & \cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=f_n(-1)=2b_n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

となり，② より，数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=1$，公比 2 の等比数列である．

よって，$\boldsymbol{b_n=2^{n-1}}$

(3) (2) の結果と ① より，$a_{n+1}=4a_n+2^n$ であり，この両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=2\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

$c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，

$$c_{n+1}=2c_n+\frac{1}{2}$$

これを変形して，$c_{n+1}+\dfrac{1}{2}=2\left(c_n+\dfrac{1}{2}\right)$ が得られる．

数列 $\left\{c_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $c_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$，公比 2 の等比数列であるから，

$$c_n+\frac{1}{2}=2^{n-1}$$

すなわち，$\boldsymbol{c_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}}$

3.

■解答例□

(1) 2 つの自然数を $a,\ b$ とおく．$a+b=30$ をみたす $a,\ b$ は

$$(a,\ b)=(1,\ 29),\ (2,\ 28),\ (3,\ 27),\ \cdots,\ (28,\ 2),\ (29,\ 1)$$

したがって，求める総数は 29 (組)

(2) 3 つの自然数を $a,\ b,\ c$ とおく．$a+b+c=30$ をみたす $a,\ b,\ c$ の組の総数は，

30 個の丸を 1 列に並べ，間の 29 ヶ所の中から異なる 2 ヶ所に棒をおく．

並べ方の総数と一致する．したがって，求める総数は

$${}_{29}\mathrm{C}_2=\frac{29\cdot 28}{2\cdot 1}=406\ (組)$$

(3) (2) の 406 組は

(i) 3 つの自然数すべてが同じもの

(ii) 3 つの自然数のうち 2 つだけが同じで残りの 1 つは異なるもの

(iii) 3 つの自然数がいずれも異なるもの

のいずれかに分類される．

(i)について

$(a,\ b,\ c)=(10,\ 10,\ 10)$ の 1 組．

(ii)について

$a=b$ となるものが

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 28),\ (2,\ 2,\ 26),\ \cdots,\ (14,\ 14,\ 2)$$

の 13 組（(10, 10, 10) は含まない）．

$b=c,\ a=c$ の場合も 13 組ずつあるが，この計 39 組には同じ組合せのものが $\dfrac{3!}{2!}$ 組ずつ存在する．

(iii)について

$$406-(1+39)=366\ (組)$$

あるが，この 366 組には同じ組合せのものが 3! 組ずつ存在する．

以上(i)〜(iii)より，求める総数は

$$1+\frac{39}{3}+\frac{366}{3!}=1+13+61=75\ (組)$$