# 2024 神戸大学（前期）数学（文系）解答例

**1.** (1) $y=\dfrac{1}{3}x^3-10x(0<x)$ において，

$$y'=x^2-10=\underbrace{(x+\sqrt{10})}_{\text{正}}(x-\sqrt{10})$$

の符号は

$$x-\sqrt{10}$$

の符号と一致する．よって,$y=\dfrac{1}{3}x^3-10x(0\leqq x)$ の増減は以下のようになる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{10}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

この $y$ の最小値を与える $x$ の値が $a_1$ であるから，

$$a_1=\sqrt{10}$$

であり，

$$b_1=\log_{10}\sqrt{10}=\frac{1}{2}$$

である．

(2) $y=\dfrac{1}{3}x^3-10a_nx(0<x)$ において，

$$y'=x^2-10a_n=\underbrace{(x+\sqrt{10a_n})}_{\text{正}}(x-\sqrt{10a_n})$$

の符号は

$$x-\sqrt{10a_n}$$

の符号と一致する．よって,$y=\dfrac{1}{3}x^3-10a_nx(0\leqq x)$ の増減は以下のようになる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{10a_n}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

この $y$ の最小値を与える $x$ の値が $a_{n+1}$ であるから，

$$a_{n+1}=\sqrt{10a_n}$$

(3) **(2)** の結果の両辺の対数をとる (底は $10$) と，

$$\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}\sqrt{10a_n}=\frac{1}{2}(1+\log_{10}a_n)$$

となるから，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+1)$$

が成り立つ．

(4) **(3)** の漸化式を変形すると，

$$b_{n+1}-1=\frac{1}{2}(b_n-1)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

となるので，すべての自然数 $n$ に対して

$$b_n-1=(b_1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

が成り立ち,**(1)** の結果をあわせて考えると，

$$b_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる．

(5)　**(4)** の結果を用いると，

$$\begin{aligned}\log_{10}\frac{a_1a_2a_3}{100} &= \log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\log_{10}a_3-2\\ &= b_1+b_2+b_3-2\\ &= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^1+1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1-\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{a_1a_2a_3}{100}=10^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{10}$$

が成り立つ．

# 2．

■解答例□

(1)　「出た目が必ず $n$ の約数となる」とは,「$n$ が,$1, 2, 3, 4(= 2^2), 5, 6(= 2 \cdot 3)$ の公倍数である」ということであり, これは,「$n$ が

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

の倍数になる」ということである.

　これを満たす自然数 $n$ で最小のものを求めると,

$$\underset{\sim\sim}{60}$$

となる.

(2)　「出た目が $n$ の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$」$\cdots[*]$ であるとき,$n$ の約数にならない唯一の目の数は 4 または 5 である. 理由は以下の通り.

　1 が $n$ の約数にならない唯一の目の数になることはありえない. なぜなら, もし 1 が $n$ の約数にならない唯一の数であれば,2 は $n$ の約数ということになるので,1 も $n$ の約数ということになってしまう (不合理).

　2 が $n$ の約数にならない唯一の目の数になることはありえない. なぜなら, もし 2 が $n$ の約数にならない唯一の数であれば,4 は $n$ の約数ということになるので,2 も $n$ の約数ということになってしまう (不合理).

　3 が $n$ の約数にならない唯一の目の数になることはありえない. なぜなら, もし 3 が $n$ の約数にならない唯一の数であれば,6 は $n$ の約数ということになるので,3 も $n$ の約数ということになってしまう (不合理).

　6 が $n$ の約数にならない唯一の目の数になることはありえない. なぜなら, もし 6 が $n$ の約数にならない唯一の数であれば,2 と 3 は $n$ の約数ということになるので,$6(= 2 \cdot 3)$ も $n$ の約数ということになってしまう (不合理).

　以上より,「出た目が $n$ の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$」$\cdots[*]$ であるとき,「$n$ の約数にならない唯一の目の数は 4 または 5」$\cdots[**]$ である.

　$[**]$ を満たすような自然数 $n$ で最小のものは

$$12$$

であり, このとき,$[*]$ は成り立つ.

　よって,$[*]$ が成り立つ $n$ で最小のものは

$$\underset{\sim\sim}{12}$$

となる.

(3)　3 回サイコロを投げたときの目の出方の総数は

$$6^3(\text{通り})$$

であり, これらはすべて同様に確からしい.

　$20 = 2^2 \cdot 5$ であるから,3 回投げて出た目の積が 20 の約数になるための条件は,「出た目の積を素因数分解したときに, 素因数 3 をもたず, 素因数 2 の個数は 2 個以下であり, 素因数 5 の個数は 1 個以下である」$\cdots[***]$ である. この条件を満たす 3 つの目の数の「組合せ」を列挙すると, 以下のようになる.

$$\begin{cases} \{1,1,1\}, \{1,1,2\}, \{1,1,4\}, \{1,1,5\}, \\ \{1,2,2\}, \{1,2,5\}, \{1,4,5\}, \\ \{2,2,5\} \end{cases}$$

ここから, 出た目の「順番」まで考えると,$[***]$ が成り立つような目の出方の総数は

$$1 \times 1 + 3 \times 5 + 3! \times 2 = 28$$

である.

よって, 求める確率は

$$\frac{28}{216}=\frac{7}{54}$$

である.

## 3.

(1) $C$ および $l_1$ の方程式から $y$ を消去して

$$ax^2+bx+c=-3x+3 \quad \therefore ax^2+(b+3)x+c-3=0 \cdots ①$$

を得る．$l_1$ は $C$ に接するので ① の判別式は 0 であり，

$$(b+3)^2-4a(c-3)=0 \cdots ①'$$

となる．$C$ および $l_2$ の方程式から $y$ を消去して得られる 2 次方程式 $ax^2+(b-1)x+c-3=0 \cdots ②$ についても同様のことを行い，

$$(b-1)^2-4a(c-3)=0 \cdots ②'$$

を得る．①′－②′ より

$$(b+3)^2-(b-1)^2=0$$

$$8b+8=0 \quad \therefore \underline{b=-1}$$

となり，これと ①′ より $(-1+3)^2-4a(c-3)=0 \quad \therefore \underline{c=\dfrac{1}{a}+3}$ を得る．

(2) $C$ が $x$ 軸と異なる 2 点で交わるので，$C$ で $y=0$ として得られる 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式は正であり，$b^2-4ac>0$ となる．これと (1) の結果から，$\dfrac{1}{a}$ のとりうる値の範囲は

$$(-1)^2-4a\left(\frac{1}{a}+3\right)>0$$

$$a<-\frac{1}{4} \quad \therefore \underline{-4<\frac{1}{a}<0}$$

となる．

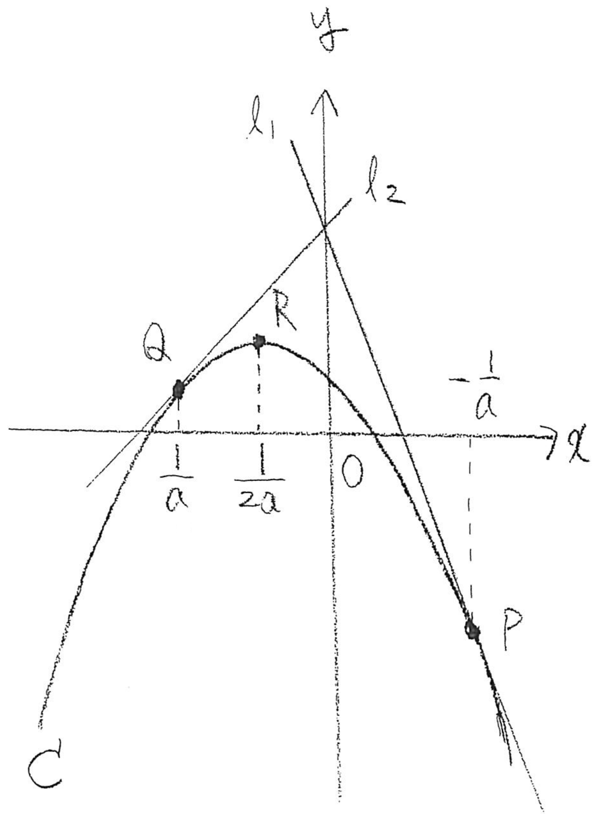
(3) (1) の結果の下で ① を解くと

$$ax^2+2x+\frac{1}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{a}\right)^2=0 \qquad \therefore x=-\frac{1}{a}$$

となり，よって $P\left(-\frac{1}{a},\ \frac{3}{a}+3\right)$ となる．同様にして②より $x=\frac{1}{a}$ が得られ，$Q\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}+3\right)$ となる．

また，(1)の結果の下では $C$ の方程式は




$$y=ax^2-x+\frac{1}{a}+3$$
$$=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{3}{4a}+3$$

となるから $R\left(\frac{1}{2a},\ \frac{3}{4a}+3\right)$ である．

$G(X,Y)$ とおくと

$$X=\frac{-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}}{3}$$
$$=\frac{1}{6a}$$
$$Y=\frac{\frac{3}{a}+3+\frac{1}{a}+3+\frac{3}{4a}+3}{3}$$
$$=\frac{19}{12a}+3$$

となり，上の2式から $a$ を消去して $Y=\frac{19}{2}X+3$ を得る．さらに(2)の結果から，$X=\frac{1}{6a}$ のとりうる値の範囲が $-\frac{2}{3}<\frac{1}{6a}<0$ より $-\frac{2}{3}<X<0$ であることをふまえ，Gの軌跡は直線 $y=\frac{19}{2}x+3$ の $-\frac{2}{3}<x<0$ を満たす部分である．