1．

■解答例□

(1) 条件 (i) より，実数 a，b，β を用いて

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta) + ax + b$$

と表すことができる．これより，

$$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)^2\cdot 1 + a$$

となり，条件 (ii) より，

$$\begin{cases} f(\alpha) = a\alpha + b = 0 \\ f'(\alpha) = a = 0 \end{cases}$$

となる．これを解いて，$(a,\, b) = (0,\, 0)$ となり，$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$ と表せる．

以上より，$f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる．

(証明了)

(2) (1) の結果と $f(\alpha+2) = 0$ より，

$$f(x) = (x-\alpha)^2\{x-(\alpha+2)\}$$

と表せて，

$$f'(x) = (x-\alpha)\{3x-(3\alpha+4)\}$$

が得られる．よって，$f'(x) = 0$ かつ $x \fallingdotseq \alpha$ をみたす x は，

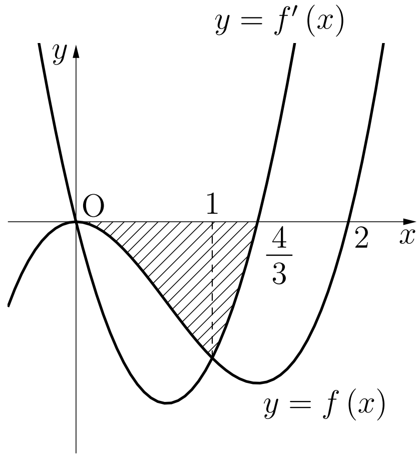
$$x = \boldsymbol{\alpha + \frac{4}{3}}$$

(3) (2) の条件，かつ，$\alpha = 0$ より，

$$\begin{cases} f(x) = x^2(x-2) \\ f'(x) = 3x\left(x-\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

となり，x の方程式 $f(x) = f'(x)$ を解くと，$x = 0$，1，4 が得られる．

これより，$y = f(x)$，$y = f'(x)$ のグラフの概形は右図のようになり，不等式の表す部分は図の斜線部分になる．ただし，境界線をすべて含む．

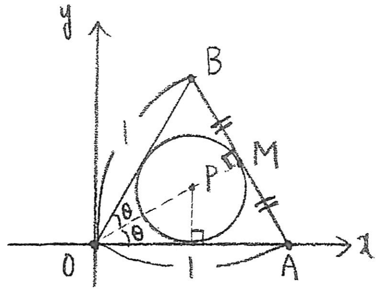


　求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{4}{3}}\{-f'(x)\}dx - \int_0^1\{f(x)-f'(x)\}dx \\ &= -3\int_0^{\frac{4}{3}} x\left(x-\frac{4}{3}\right)dx - \int_0^1(x^3-5x^2+4x)dx \\ &= -3\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{4}{3}-0\right)^3 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{65}{108}} \end{aligned}$$

2.

(1)



△OAB は OA = OB = 1 の二等辺三角形であるから、
2点A, Bの中点をMとすると OM ⊥ AB であり、∠BOM = θ
であるから、BM = sinθ より AB = 2sinθ となる。
よって、内接円の半径をrとすると、

$$\frac{1}{2}\times r\times(1+1+2\sin\theta)=\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin 2\theta$$

$$2(1+\sin\theta)r=2\sin\theta\cos\theta$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $1+\sin\theta\neq 0$ だから

$$r=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

点Pのy座標とrは一致し、Pは直線OM上にあるので、点Pのx座標は $r=(\tan\theta)\cdot x$ をみたし、

$$x=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\times\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}=\frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}{1+\sin\theta}=1-\sin\theta$$

よって、点Pの座標は

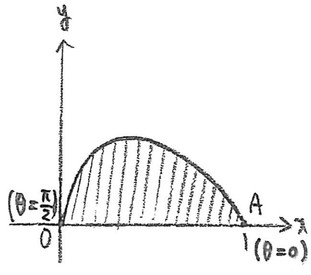
$$P\left(1-\sin\theta,\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

■

(2) $x=1-\sin\theta$, $y=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$ は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において、

$$\frac{dx}{d\theta}=-\cos\theta<0,\quad y>0$$

よって、Dは右図の斜線部分であるから、求める立体の体積をVとすると



$$\frac{V}{\pi}=\int_0^1 y^2dx=\int_0^1\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}(-\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_2^1\frac{(t-1)^2(-t^2+2t)}{t^2}(-dt)\qquad(1+\sin\theta=t\text{とおいた})$$

$$=\int_2^1\left(t^2-4t+5-\frac{2}{t}\right)dt=\left[\frac{t^3}{3}-2t^2+5t-2\log t\right]_2^1$$

$$=\frac{1}{3}-2+5-2\log 1-\frac{8}{3}+8-10+2\log 2=2\log 2-\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ V=\left(2\log 2-\frac{4}{3}\right)\pi$$

3.

■解答例□

(1) 2 つの自然数を $a,\ b$ とおく．$a+b=30$ をみたす $a,\ b$ は

$$(a,\ b)=(1,\ 29),\ (2,\ 28),\ (3,\ 27),\ \cdots,\ (28,\ 2),\ (29,\ 1)$$

したがって，求める総数は $\underline{29\ (組)}$

(2) 3 つの自然数を $a,\ b,\ c$ とおく．$a+b+c=30$ をみたす $a,\ b,\ c$ の組の総数は，

30 個の丸を 1 列に並べ，間の 29 ヶ所の中から異なる 2 ヶ所に棒をおく．

並べ方の総数と一致する．したがって，求める総数は

$${}_{29}\mathrm{C}_2=\frac{29\cdot 28}{2\cdot 1}=\underline{406\ (組)}$$

(3) (2) の 406 組は

(i)　3 つの自然数すべてが同じもの

(ii)　3 つの自然数のうち 2 つだけが同じで残りの 1 つは異なるもの

(iii)　3 つの自然数がいずれも異なるもの

のいずれかに分類される．

(i)について

$(a,\ b,\ c)=(10,\ 10,\ 10)$ の 1 組.

(ii)について

$a=b$ となるものが

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 28),\ (2,\ 2,\ 26),\ \cdots,\ (14,\ 14,\ 2)$$

の 13 組（$(10,\ 10,\ 10)$ は含まない）.

$b=c,\ a=c$ の場合も 13 組ずつあるが，この計 39 組には同じ組合せのものが $\dfrac{3!}{2!}$ 組ずつ存在する.

(iii)について

$$406-(1+39)=366\text{（組）}$$

あるが，この 366 組には同じ組合せのものが 3! 組ずつ存在する.

以上(i)〜(iii)より，求める総数は

$$1+\frac{39}{3}+\frac{366}{3!}=1+13+61=\underline{75\ (組)}$$

４.

■解答例□

(1) $$f(x)=\frac{\sin x}{x}\quad (2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi)$$

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$g(x)=x\cos x-\sin x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

$x^2>0$ より，$f'(x)$ と $g(x)$ の符号は一致する．

$$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$$

$2n\pi<x<(2n+1)\pi$ において，$\sin x>0$，$x>0$ なので，$g'(x)<0$

すなわち，$g(x)$ は単調に減少する．

このとき，

$$g(2n\pi)=2n\pi>0,\qquad g((2n+1)\pi)=-(2n+1)\pi<0$$

であるから，$\begin{cases} y=g(x) \\ y=0 \end{cases}$ のグラフは $2n\pi<x<(2n+1)\pi$ の範囲でただ１つの共有点をもち，その x 座標を α とすると，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$2n\pi$	$\cdots$	α	$\cdots$	$(2n+1)\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	最大	↘	

よって，$f(x)$ が最大となる x の値がただ１つ存在する．

(証明了)

(2) (1) の α が x_n であるから，

$$2n\pi<x_n<(2n+1)\pi\quad\cdots\cdots①$$

であり，$g(x_n)=0$ であるから，$x_n\cos x_n-\sin x_n=0$

すなわち，$\tan x_n=\dfrac{\sin x_n}{\cos x_n}=x_n$

これより，$\dfrac{n}{\tan x_n}=\dfrac{n}{x_n}$

これと ① より，$\dfrac{n}{(2n+1)\pi}<\dfrac{n}{\tan x_n}<\dfrac{1}{2\pi}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2n+1)\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\pi}=\frac{1}{2\pi}$

よって，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\tan x_n}=\boldsymbol{\frac{1}{2\pi}}$

$\boxed{5}$

■解答例□

(1)

$p=3$ のとき $x_1=\dfrac{1}{9}$．よって，

$$x_2=\left|2\cdot\frac{1}{9}-1\right|=\frac{7}{9},\quad x_3=\left|2\cdot\frac{7}{9}-1\right|=\frac{5}{9},\quad x_4=\left|2\cdot\frac{5}{9}-1\right|=\frac{1}{9}(=x_1)$$

となる．さらに，$n\geqq 1$ において x_{n+1} が x_n のみから決定されることをふまえれば，$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\ \cdots$ は周期的であり，$\dfrac{1}{9},\ \dfrac{7}{9},\ \dfrac{5}{9},\ \dfrac{1}{9},\ \cdots$ を繰り返すことがわかる．

よって m を自然数として，

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{9} & (n=3m-2)\\[2mm] \dfrac{7}{9} & (n=3m-1)\\[2mm] \dfrac{5}{9} & (n=3m)\end{cases}$$

となる．

(2)

$2\leqq n\leqq p+1$ において $x_n=\dfrac{2^p+1-2^{n-1}}{2^p+1}\cdots(*)$ であることを数学的帰納法にて以下に示す．

(I)　p は自然数なので $2^p-1>0$．よって $x_2=|2x_1-1|=\left|2\cdot\dfrac{1}{2^p+1}-1\right|=\left|\dfrac{1-2^p}{2^p+1}\right|=\dfrac{2^p-1}{2^p+1}$ となり，$n=2$ のとき $(*)$ を満足する．

(II)　$n=k$ のとき $(*)$ の成立を仮定する，すなわち $x_k=\dfrac{2^p+1-2^{k-1}}{2^p+1}$ であると仮定すると（$2\leqq k\leqq p$），$2\leqq k\leqq p$ においては $2^p+1-2^k>0$ なので，

$$\begin{aligned} x_{k+1}=|2x_k-1| &= \left|2\cdot\frac{2^p+1-2^{k-1}}{2^p+1}-1\right| \\ &= \left|\frac{2(2^p+1-2^{k-1})-(2^p+1)}{2^p+1}\right| \\ &= \left|\frac{2^p+1-2^k}{2^p+1}\right|=\frac{2^p+1-2^k}{2^p+1} \end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ を満足する．

(I)，(II) より $(*)$ の成立が示された．よって $(*)$ で $n=p+1$ とすることにより，

$$\begin{aligned} x_{p+1} &= \frac{2^p+1-2^p}{2^p+1} \\ &= \frac{1}{2^p+1}=x_1 \end{aligned}$$

である．