2024 神戸大学（前期）数学（理系）解答例

1. (1) $y = x + \sqrt{c - x^2}(0 < x < \sqrt{c})$ において，

$$y' = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{c - x^2}} = \frac{\sqrt{c - x^2} - x}{\sqrt{c - x^2}} = \frac{\sqrt{c - x^2} - \sqrt{x^2}}{\sqrt{c - x^2}}$$

の符号は

$$(c - x^2) - x^2 = \underbrace{(\sqrt{c} + \sqrt{2}x)}_{\text{正}}(\sqrt{c} - \sqrt{2}x)$$

の符号と一致する．よって,$y = x + \sqrt{c - x^2}(0 \leqq x \leqq \sqrt{c})$ の増減は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{c}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{c}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

この y の最大値を与える x の値が a_1 であるから，

$$a_1 = \sqrt{\frac{c}{2}}$$

(2) $y = x + \sqrt{a_n - x^2}(0 < x < \sqrt{a_n})$ において，

$$y' = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{a_n - x^2}} = \frac{\sqrt{a_n - x^2} - x}{\sqrt{a_n - x^2}} = \frac{\sqrt{a_n - x^2} - \sqrt{x^2}}{\sqrt{a_n - x^2}}$$

の符号は

$$(a_n - x^2) - x^2 = \underbrace{(\sqrt{a_n} + \sqrt{2}x)}_{\text{正}}(\sqrt{a_n} - \sqrt{2}x)$$

の符号と一致する．よって,$y = x + \sqrt{a_n - x^2}(0 \leqq x \leqq \sqrt{a_n})$ の増減は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a_n}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{a_n}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

この y の最大値を与える x の値が a_{n+1} であるから，

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n}{2}}$$

である．

この両辺の対数 (底は 2) をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 \left(\frac{a_n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_2 a_{n+1} = \frac{1}{2}(\log_2 a_n - \log_2 2)$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - 1)$$

が得られる．

(3) **(2)** の漸化式を変形すると，

$$b_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(b_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となるので, すべての自然数 n に対して

$$b_n + 1 = (b_1 + 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

が成り立ち,**(1)** の結果をあわせて考えると，

$$b_n = -1 + (1 + \log_2 c)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる．

代々木ゼミナール

2. (1) Cおよびl_1の方程式からyを消去して

$$ax^2+bx+c=-3x+3 \qquad \therefore\ ax^2+(b+3)x+c-3=0 \cdots ①$$

を得る．l_1はCに接するので①の判別式は0であり，

$$(b+3)^2-4a(c-3)=0 \cdots ①'$$

となる．Cおよびl_2の方程式からyを消去して得られる2次方程式$ax^2+(b-1)x+c-3=0 \cdots ②$についても同様のことを行い，

$$(b-1)^2-4a(c-3)=0 \cdots ②'$$

を得る．①′−②′より

$$(b+3)^2-(b-1)^2=0$$

$$8b+8=0 \qquad \therefore\ \underline{b=-1}$$

となり，これと①′より $(-1+3)^2-4a(c-3)=0$ $\therefore\ \underline{c=\frac{1}{a}+3}$を得る．

(2) Cがx軸と異なる2点で交わるので，Cで$y=0$として得られる2次方程式$ax^2+bx+c=0$の判別式は正であり，$b^2-4ac>0$となる．これと(1)の結果から，$\frac{1}{a}$のとりうる値の範囲は

$$(-1)^2-4a\left(\frac{1}{a}+3\right)>0$$

$$a<-\frac{1}{4} \qquad \therefore\ \underline{-4<\frac{1}{a}<0}$$

となる．

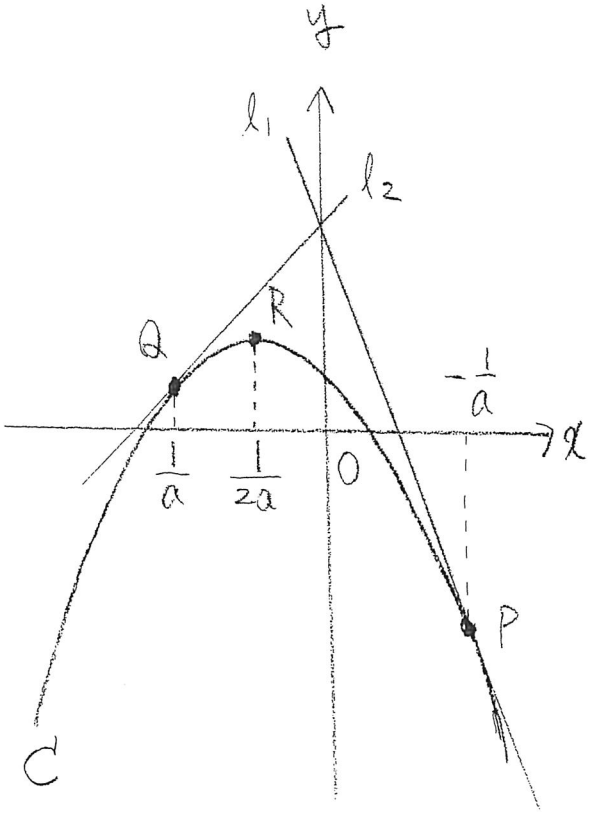
(3) (1)の結果の下で①を解くと

$$ax^2+2x+\frac{1}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{a}\right)^2=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{1}{a}$$

となり，よって $P\left(-\frac{1}{a},\ \frac{3}{a}+3\right)$ となる．同様にして②より $x=\frac{1}{a}$ が得られ，$Q\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}+3\right)$ となる．

また，(1)の結果の下では C の方程式は



$$y=ax^2-x+\frac{1}{a}+3$$
$$=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{3}{4a}+3$$

となるから $R\left(\frac{1}{2a},\ \frac{3}{4a}+3\right)$ である．

$G(X,Y)$ とおくと

$$X=\frac{-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}}{3}$$
$$=\frac{1}{6a}$$
$$Y=\frac{\frac{3}{a}+3+\frac{1}{a}+3+\frac{3}{4a}+3}{3}$$
$$=\frac{19}{12a}+3$$

となり，上の2式から a を消去して $Y=\frac{19}{2}X+3$ を得る．さらに(2)の結果から，$X=\frac{1}{6a}$ のとりうる値の範囲が $-\frac{2}{3}<\frac{1}{6a}<0$ より $-\frac{2}{3}<X<0$ であることをふまえ，G の軌跡は直線 $y=\frac{19}{2}x+3$ の $-\frac{2}{3}<x<0$ を満たす部分である．

3．

■解答例□

(1)　「出た目が必ず n の約数となる」とは,「n が,$1,2,3,4(=2^2),5,6(=2\cdot 3)$ の公倍数である」ということであり, これは,「n が

$$2^2\cdot 3\cdot 5=60$$

の倍数になる」ということである.

これを満たす自然数 n を小さい方から順に 3 つ求めると,

$$\underline{60,120,180}$$

となる.

(2)　「出た目が n の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$」$\cdots[*]$ であるとき,n の約数にならない唯一の目の数は 4 または 5 である. 理由は以下の通り.

1 が n の約数にならない唯一の目の数になることはありえない. なぜなら, もし 1 が n の約数にならない唯一の数であれば,2 は n の約数ということになるので,1 も n の約数ということになってしまう (不合理).

2 が n の約数にならない唯一の目の数になることはありえない. なぜなら, もし 2 が n の約数にならない唯一の数であれば,4 は n の約数ということになるので,2 も n の約数ということになってしまう (不合理).

3 が n の約数にならない唯一の目の数になることはありえない. なぜなら, もし 3 が n の約数にならない唯一の数であれば,6 は n の約数ということになるので,3 も n の約数ということになってしまう (不合理).

6 が n の約数にならない唯一の目の数になることはありえない. なぜなら, もし 6 が n の約数にならない唯一の数であれば,2 と 3 は n の約数ということになるので,$6(=2\cdot 3)$ も n の約数ということになってしまう (不合理).

以上より,「出た目が n の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$」$\cdots[*]$ であるとき,「n の約数にならない唯一の目の数は 4 または 5」$\cdots[**]$ である.

$[**]$ を満たすような自然数 n を小さい順に列挙し,$[*]$ が成り立つかどうかを調べていくと, 次のようになる.

$$\begin{cases} n=12 \text{ のとき} & [*] \text{ が成り立つ} \\ n=24 \text{ のとき} & [*] \text{ が成り立つ} \\ n=30 \text{ のとき} & [*] \text{ が成り立つ} \end{cases}$$

よって,$[*]$ が成り立つ n を小さい順に 3 つ求めると,

$$\underline{12,24,30}$$

となる.

(3)　3 回サイコロを投げたときの目の出方の総数は

$$6^3(\text{通り})$$

であり, これらはすべて同様に確からしい.

$160=2^5\cdot 5$ であるから,3 回投げて出た目の積が 160 の約数になるための条件は,「出た目の積を素因数分解したときに, 素因数 3 をもたず, 素因数 2 の個数は 5 個以下であり, 素因数 5 の個数は 1 個以下である」$\cdots[***]$ である. この条件を満たす 3 つの目の数の「組合せ」を列挙すると, 以下のようになる.

$$\begin{cases} \{1,1,1\},\{1,1,2\},\{1,1,4\},\{1,1,5\}, \\ \{1,2,2\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,4,4\},\{1,4,5\}, \\ \{2,2,2\},\{2,2,4\},\{2,2,5\},\{2,4,4\},\{2,4,5\}, \\ \{4,4,5\} \end{cases}$$

代々木ゼミナール

ここから, 出た目の「順番」まで考えると,[$***$] が成り立つような目の出方の総数は

$$1 \times 2 + 3 \times 9 + 3! \times 4 = 53$$

である.

よって, 求める確率は

$$\frac{53}{216}$$

である.

4.

■ 解答例 □

(1) 直方体 ABCD − EFGH を直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体 X_1 は,

底面の半径が $\mathrm{AC} = 2$

高さが $\mathrm{AE} = 1$

の円柱である．よって，X_1 の体積 V_1 は,

$$V_1 = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = 4\pi$$

直方体 ABCD − EFGH を直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体 X_2 は,

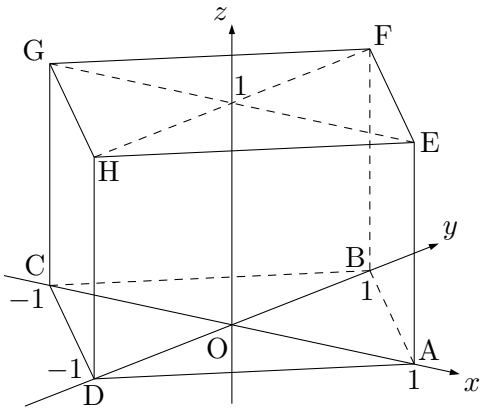
底面の半径が $\mathrm{AH} = \sqrt{\mathrm{AD}^2 + \mathrm{DH}^2}$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

高さが $\mathrm{AB} = \sqrt{2}$

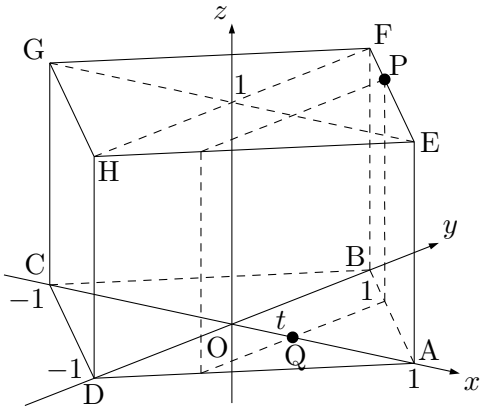
の円柱である．よって，X_2 の体積 V_2 は,

$$V_2 = \pi \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}\pi$$



(2) 線分 EF：$y = -x + 1 \ (0 \leqq x \leqq 1)$ かつ $z = 1$ より，平面 $x = t \ (0 \leqq t \leqq 1)$ と線分 EF の共有点を P とすると,

$$\mathrm{P}(t,\ -t+1,\ 1)$$



(3) 直方体 ABCD − EFGH を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 X_3 は，yz 平面に関して対称である．

X_3 の平面 $x = t \ (0 \leqq t \leqq 1)$ における断面積を $S(t)$ とすると，$\mathrm{Q}(t,\ 0,\ 0)$ として,

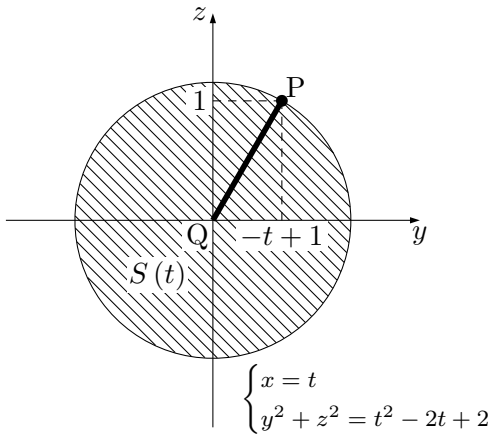
$$S(t) = \pi \mathrm{QP}^2 = \pi\left\{(-t+1)^2 + 1^2\right\}$$

$$= \pi\left(t^2 - 2t + 2\right)$$

よって，X_3 の体積 V_3 は,

$$V_3 = 2\int_0^1 S(t)\,dt = 2\pi\int_0^1 \left(t^2 - 2t + 2\right)dt$$

$$= 2\pi\left[\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t\right]_0^1 = \frac{8}{3}\pi$$



代々木ゼミナール

5.

■ 解答例 □

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+u^2}\,du \quad (x \geqq 0)$$
$$= \int_{0}^{x} \frac{1}{1+u^2}\,du \quad \left(\because \ \frac{1}{1+u^2} \text{ は偶関数}\right)$$

(1) $0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす α に対して，

$$f(\tan\alpha) = \int_{0}^{\tan\alpha} \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$u = \tan\theta$ とおくと，$\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

u	0	$\to$	$\tan\alpha$
θ	0	$\to$	α

$$\int_{0}^{\tan\alpha} \frac{1}{1+u^2}\,du = \int_{0}^{\alpha} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{du}{d\theta}\,d\theta$$
$$= \int_{0}^{\alpha} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$= \int_{0}^{\alpha} d\theta = \Big[\theta\Big]_{0}^{\alpha} = \alpha$$

よって，$f(\tan\alpha) = \underset{\sim}{\alpha}$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ となるそれぞれの x，y に対して，

$$x = \tan\beta \ \left(0 \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{4}\right), \qquad y = \tan\gamma \ \left(0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

となる β，γ が存在する．

(1) より，$f(x) = f(\tan\beta) = \beta$，$f(y) = f(\tan\gamma) = \gamma$，$f(1) = f\left(\tan\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

$f(x) + f(y) \leqq f(1)$ について，$0 \leqq \beta + \gamma \leqq \dfrac{\pi}{4}$

$\beta = \dfrac{\pi}{4}$ かつ $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$ となることはないので，$0 \leqq xy < 1$

ここで，$\tan(\beta+\gamma) = \dfrac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma} = \dfrac{x+y}{1-xy}$

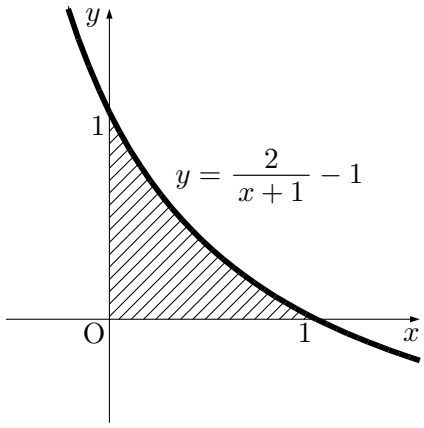
$0 \leqq \tan(\beta+\gamma) \leqq 1$ であるから，$0 \leqq \dfrac{x+y}{1-xy} \leqq 1$

すなわち，$y \leqq \dfrac{-x+1}{x+1} = \dfrac{2}{x+1} - 1$

よって，領域を図示すると右図斜線部分（境界線は含む）で，

その面積を S とすると，

$$S = \int_{0}^{1}\left(\frac{2}{x+1} - 1\right)dx = \Big[2\log(x+1) - x\Big]_{0}^{1}$$
$$= \underset{\sim}{2\log 2 - 1}$$



代々木ゼミナール