［１］　$f(x)=e^{-x}-e^{-2x}$ とおくと，$f'(x)=-e^{-x}+2e^{-2x}$

$y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

この直線が点 $(a,0)$ を通る条件は

$$-f(t)=f'(t)(a-t)$$

$$e^t-1=(e^t-2)(a-t)\ \cdots\cdots①$$

$e^t=2$ すなわち $t=\log 2$ は①を満たさない．

$t\fallingdotseq\log 2$ のとき，

$$① \Leftrightarrow a=t+\frac{e^t-1}{e^t-2}\ \cdots\cdots②$$

$g(t)=t+\dfrac{e^t-1}{e^t-2}$ $(t\fallingdotseq\log 2)$ とおくと

$$g(t)=t+1+\frac{1}{e^t-2}$$

$$g'(t)=1-\frac{e^t}{(e^t-2)^2}=\frac{e^{2t}-5e^t+4}{(e^t-2)^2}=\frac{(e^t-1)(e^t-4)}{(e^t-2)^2}$$

$g'(t)=0$ より，$e^t=1,4$ より，$t=0,2\log 2$

よって，$g(t)$ の増減は次のようになる．

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	$2\log 2$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	/	$\searrow$	$2\log 2+\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$

$$\lim_{t\to-\infty}g(t)=\lim_{t\to-\infty}\left(t+1+\frac{1}{e^t-2}\right)=-\infty,\quad \lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}\left(t+1+\frac{1}{e^t-2}\right)=\infty$$

①を満たす実数 t が存在する条件は，曲線 $s=g(t)$ と直線 $s=a$ が共有点をもつことから，

$$a\leqq 0,\ a\geqq 2\log 2+\frac{3}{2}\ \cdots\cdots（答）$$

[２]

(1) $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とおくと．$(2\omega-1)^2=-3$，$\omega^2-\omega+1=0$

よって，$\omega^2=\omega-1$

$\omega^3=\omega(\omega-1)=\omega^2-\omega=-1$

$\omega^4=-\omega$

$f(\omega)=\omega^4+a\omega^3+b\omega^2+c\omega+d$

$=-\omega-a+b(\omega-1)+c\omega+d$

$=(b+c-1)\omega-a-b+d=0$

ω は虚数で，a，b，c，d は整数だから

$b+c-1=0$，$-a-b+d=0$

したがって，$c=1-b$，$d=a+b$ ……(答)

(2) $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+(1-b)x+a+b$ より

$f(-1)=3b=7k_1+3=11k_2+10$ (k_1, k_2 は整数)

と表され，

$7(k_1-1)=11k_2$

7 と 11 は互いに素より，$k_1=11k+1$，$k_2=7k$ (k は整数)

このとき，$3b=77k+10$，$|77k+10|=3|b|\leqq 120$

これを満たす整数 k は，$k=-1, 0, 1$

b が整数であるから，$k=1$，$b=29$

$f(1)=2a+b+2=2a+31=7l_1+1=11l_2+10$ (l_1, l_2 は整数)

と表され

$2a=7l_1-30=11l_2-21$

$7l_1-11l_2=9$ ……①

$7\times6-11\times3=9$……②

①−②より，$7(l_1-6)=11(l_2-3)$

7 と 11 は互いに素より，$l_1=11l+6$，$l_2=7l+3$ (l は整数) と表され

$2a=11(7l+3)-21=77l+12$，$|77l+12|=2|a|\leqq 80$

これを満たす整数 l は，$l=0, -1$

a が整数になるのは $l=0$ であり，$a=6$

したがって，$f(x)=x^4+6x^3+29x^2-28x+35=(x^2-x+1)(x^2+7x+35)$

であるから，$f(x)=0$ の解は

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$，$\dfrac{-7\pm\sqrt{91}\,i}{2}$ ……(答)

［3］

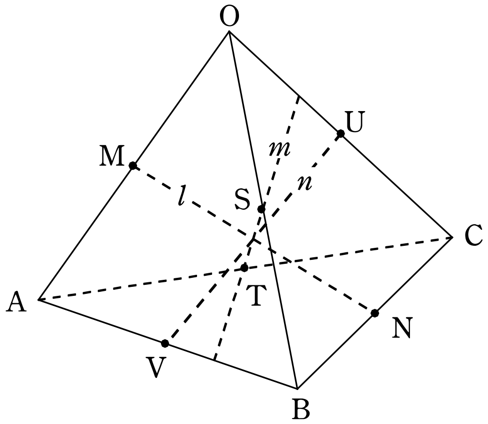
(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．

辺 OA の中点をM，辺 BC の中点を N，辺 OB の中点を S，
辺 AC の中点を T，辺 OC の中点を U，辺 AB の中点を V とおくと，

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b})$$

$$\overrightarrow{UV}=\overrightarrow{OV}-\overrightarrow{OU}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$$



$l\perp m$ より，

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MN}\cdot2\overrightarrow{ST}&=(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b})\\&=(\vec{c}+\vec{b}-\vec{a})\cdot\{\vec{c}-(\vec{b}-\vec{a})\}\\&=|\vec{c}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2=0\end{aligned}$$

よって，$|\vec{c}|=|\vec{b}-\vec{a}|=AB=\sqrt{5}$

同様にして，

$l\perp n$ より $|\vec{b}|=AC=2$，$m\perp n$ より $|\vec{a}|=BC=\sqrt{3}$

したがって，

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=5$ より，$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

$|\vec{b}-\vec{c}|^2=3$ より，$|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=3$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$

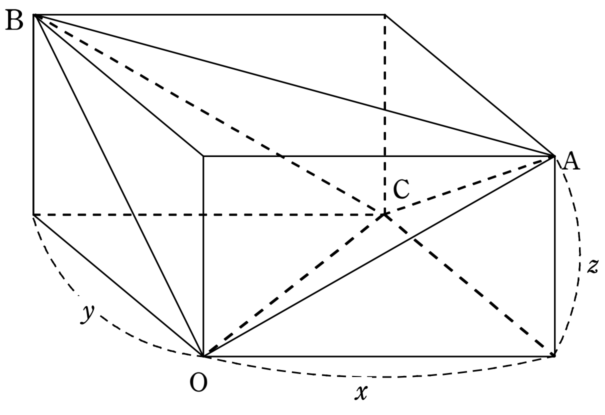
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}=-2$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{CA}|}=\dfrac{1}{2}$ より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ …… (答)

(2) (1)の結果から

$$OA=BC，OB=AC，OC=AB$$

であるから，四面体 OABC は図のように直方体に埋め込むことができる，直方体の辺の長さを図のように x，y，z とおくと，



$OA=\sqrt{3}$ より，$x^2+z^2=3$

$OB=2$ より，$y^2+z^2=4$

$OC=\sqrt{5}$ より，$x^2+y^2=5$

したがって，$x^2+y^2+z^2=6$

よって，四面体 OABC の 4 つの頂点をすべて通る球の半径は

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\quad\cdots\cdots\ (答)$$

［4］

(1)　X が 25 の倍数になるには少なくとも 2 回 5 の目が出れば良いので，余事象を考えて

$$1-\frac{4!}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{19}{144}$$ …(答)

(2)　余事象を考える．X が 4 の倍数ではないのは，次の 2 つの場合がある．

（ i ）　2，6 の目が 1 つ，奇数の目が 3 つ出る

（ ii ）　すべて奇数の目が出る

したがって，求める確率は　$1-\dfrac{4!}{3!}\left(\dfrac{2}{6}\right)\left(\dfrac{3}{6}\right)^3-\left(\dfrac{3}{6}\right)^4=\dfrac{37}{48}$ …(答)

(3)　X が $100\,(=2^2\cdot 5^2)$ の倍数となるのは，次の 3 つの場合がある．

（ i ）　5 の目が 2 つ，偶数の目が 2 つ出る

（ ii ）　5 の目が 2 つ，4 の目が 1 つ，1 または 3 の目が 1 つ出る

（iii）　5 の目が 3 つ，4 の目が 1 つ出る

したがって，求める確率は

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2+\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)+\frac{4!}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{41}{648}$$ …(答)

［5］

(1) 立体 T は連立不等式

$$x^2+(y-2)^2\leqq 1,\ 0\leqq z\leqq 3,\ z\leqq y$$

で表され，平面 $x=t$ で切ったときの断面の yz 平面への正射影 T' は，不等式

$$t^2+(y-2)^2\leqq 1\cdots\cdots①,\ 0\leqq z\leqq 3,\ z\leqq y$$

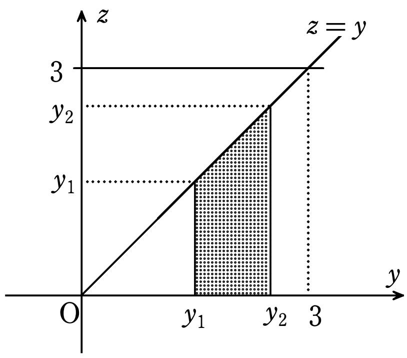
で表される領域である.

$$①\Leftrightarrow (y-2)^2\leqq 1-t^2 \Leftrightarrow 2-\sqrt{1-t^2}\leqq y\leqq 2+\sqrt{1-t^2}$$

$y_1=2-\sqrt{1-t^2}$，$y_2=2+\sqrt{1-t^2}$ とおくと

$-1\leqq t\leqq 1$ より，$0\leqq\sqrt{1-t^2}\leqq 1$ であるから，$1\leqq y_1<y_2\leqq 3$

したがって，T' は図の打点部で



$$S(t)=\frac{1}{2}(y_1+y_2)(y_2-y_1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{1-t^2}$$

$$=4\sqrt{1-t^2}\ \cdots\cdots\text{（答）}$$

T の体積は $\displaystyle\int_{-1}^{1}S(t)dt=8\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$

$t=\sin\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\left[\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

よって，T の体積は 2π ……（答）

(2) O を中心とし点 (y_2, y_2) を通る円を C_1，点 $(y_1, 0)$ を通る円を C_2 とおく.

T を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の平面 $x=t$ による切り口は，2 円 C_1 と C_2 で囲まれた円環領域だから，断面積を $S_1(t)$ とおくと

$$S_1(t)=\pi(2{y_2}^2-{y_1}^2)$$

$$2{y_2}^2-{y_1}^2=2\left(2+\sqrt{1-t^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-t^2}\right)^2$$

$$=2\left(5-t^2+4\sqrt{1-t^2}\right)-\left(5-t^2-4\sqrt{1-t^2}\right)$$

$$=5-t^2+12\sqrt{1-t^2}$$

よって，求める立体の体積は

$$\pi\int_{-1}^{1}\left(5-t^2+12\sqrt{1-t^2}\right)dt=2\pi\int_0^1\left(5-t^2+12\sqrt{1-t^2}\right)dt$$

$$=2\pi\int_0^1(5-t^2)dt+24\pi\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$=\frac{28}{3}\pi+24\pi\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=6\pi^2+\frac{28}{3}\pi\ \cdots\cdots\text{（答）}$$