[1]

(1) $x^2=3(x-a)^2+a^3-40 \Leftrightarrow 2x^2-6ax+a^3+3a^2-40=0$ …①

①の判別式を D とおくと，C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるので，

$$\frac{D}{4}=9a^2-2(a^3+3a^2-40)>0$$

$$\Leftrightarrow -2a^3+3a^2+80>0 \Leftrightarrow 2a^3-3a^2-80<0$$

$$\Leftrightarrow (a-4)(2a^2+5a+20)<0 \text{ …②}$$

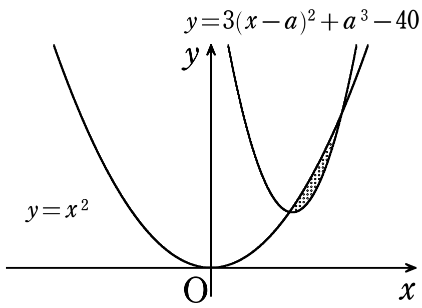
ここで， $a \geqq 0$ より $2a^2+5a+20>0$ であるから，②より $0 \leqq a<4$ …(答)

(2) ①の異なる 2 解を α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，

$$3(x-a)^2+a^3-40-x^2=2(x-\alpha)(x-\beta)$$

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において　$3(x-a)^2+a^3-40 \leqq x^2$

よって， C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は



$$S=\int_\alpha^\beta \{x^2-\{3(x-a)^2+a^3-40\}\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta 2(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}(-2a^3+3a^2+80)^{\frac{3}{2}}$$

$0 \leqq a<4$ において，$f(a)=-2a^3+3a^2+80$ が最大となるとき， S は最大となる．

$$f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$$

$$f'(a)=0 \Leftrightarrow a=0,\ 1$$

$0 \leqq a<4$ において，右図の増減表より

$a=1$ のとき $f(a)$ は最大値をとる．

a	0	…	1	…	4
f'	0	+	0	−	
f		↗	81	↘	

したがって，求める面積 S の最大値は 243 …(答)

［2］

(1)　正四面体であることから，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ が成り立つ.

$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{1+p^2}$，$\mathrm{OC}=\sqrt{q^2+r^2+s^2}$，$\mathrm{AC}=\sqrt{(q-1)^2+(r-1)^2+s^2}$

$\mathrm{BC}=\sqrt{(q-1)^2+r^2+(s-p)^2}$ であることから

$$\begin{cases}\mathrm{OA}=\mathrm{OB}\\ \mathrm{OA}=\mathrm{OC}\\ \mathrm{OA}=\mathrm{AC}\\ \mathrm{OA}=\mathrm{BC}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2=1+p^2\\ 2=q^2+r^2+s^2\\ 2=(q-1)^2+(r-1)^2+s^2\\ 2=(q-1)^2+r^2+(s-p)^2\end{cases} \cdots ①$$

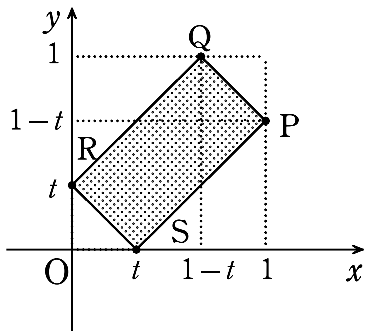
$p>0$，$s>0$ より①を解くと，$p=1,\ q=0,\ r=1,\ s=1$ …(答)

(2)　平面 $z=t$ と線分 AB，AC，OC，OB との交点をそれぞれ P，Q，R，S とおくと

$\mathrm{P}(1,\ 1-t,\ t)$，$\mathrm{Q}(1-t,\ 1,\ t)$，$\mathrm{R}(0,\ t,\ t)$，$\mathrm{S}(t,\ 0,\ t)$　(ただし，$0\leqq t\leqq 1$)

平面 $z=t$ で正四面体 OABC を切ったときの断面は

右のグラフより，長方形 PQRS の周および内部である.



断面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{SP}}\right|=\sqrt{2}\,t\cdot\sqrt{2}(1-t)=2t(1-t)$$
$$=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

したがって，$0\leqq t\leqq 1$ において断面積 $S(t)$ は

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる. …(答)

［3］

(1)　$\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とおくと，$2\omega-1=\sqrt{3}\,i \Longrightarrow (2\omega-1)^2=-3 \Longrightarrow \omega^2-\omega+1=0$

$\omega^2=\omega-1,\ \omega^3=\omega(\omega-1)=\omega^2-\omega=-1$

$f(\omega)=\omega^3+a\omega^2+b\omega+c=-1+a(\omega-1)+b\omega+c=(a+b)\omega+c-a-1=0$

ω は虚数で，$a+b$，$c-a-1$ は整数より $a+b=0,\ c-a-1=0$

これらを解くと，$a=c-1,\ b=1-c$ …(答)

(2)　$f(1)=c+1$，$f(-1)=3c-3$

$f(1)$ は 7 で割ると 4 余り，$f(-1)$ は 11 で割ると 2 余るので，

$\begin{cases} c+1=7k+4 \cdots ① \\ 3c-3=11l+2 \cdots ② \end{cases}$ ($k,\ l$ は整数) とおける．

①×3−②より　$11l-21k=4$ …③

$l=8,\ k=4$ は③の整数解の一つであるから，

$11(l-8)-21(k-4)=0$ すなわち $11(l-8)=21(k-4)$

11 と 21 は互いに素であるから，整数 n を用いて

$l-8=21n,\ k-4=11n$ と表される．

①より $c=7(11n+4)+3=77n+31$

$|c|\leqq 40 \Longleftrightarrow |77n+31|\leqq 40$

これを満たす整数 n は $n=0$

このとき $a=30,\ b=-30,\ c=31$ より

$f(x)=x^3+30x^2-30x+31=(x+31)(x^2-x+1)$

したがって，$f(x)=0$ の解は $x=-31,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ …(答)

［4］

(1)　X が 25 の倍数になるには少なくとも 2 回 5 の目が出れば良いので，余事象を考えて

$$1-\frac{4!}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{19}{144}$$ …(答)

(2)　余事象を考える．X が 4 の倍数ではないのは，次の 2 つの場合がある．

（ i ）　2，6 の目が 1 つ，奇数の目が 3 つ出る

（ ii ）　すべて奇数の目が出る

したがって，求める確率は　$1-\frac{4!}{3!}\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^4=\frac{37}{48}$ …(答)

(3)　X が 100 $(=2^2\cdot5^2)$ の倍数となるのは，次の 3 つの場合がある．

（ i ）　5 の目が 2 つ，偶数の目が 2 つ出る

（ ii ）　5 の目が 2 つ，4 の目が 1 つ，1 または 3 の目が 1 つ出る

（iii）　5 の目が 3 つ，4 の目が 1 つ出る

したがって，求める確率は

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2+\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)+\frac{4!}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{41}{648}$$ …(答)