【解答例】

$\boxed{1}$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ より，3 点 O，A，B の座標が

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$$

であり，点 C の座標が $\mathrm{C}(X,\ Y,\ Z)(Z>0)$ となるように xyz 座標軸を設定することができる．以下，この設定で考える．

$\mathrm{OC}=1$ であるから，

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=1$$

すなわち

$$X^2+Y^2+Z^2=1 \quad \cdots①$$

が成り立つ．

次に，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(1-X,\ -Y,\ -Z)\\ \overrightarrow{\mathrm{CB}}=(-X,\ 1-Y,\ -Z)\end{cases}$$

であり，$\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{ACB}$ を言い換えていくと，

$$\cos\angle\mathrm{COA}=\cos\angle\mathrm{COB}=\cos\angle\mathrm{ACB}$$

$$\iff \frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}$$

$$\iff \begin{cases}X=Y & \cdots②\\ \text{かつ} & \\ X=\dfrac{(1-X)(-X)+(-Y)(1-Y)+Z^2}{\sqrt{(1-X)^2+Y^2+Z^2}\sqrt{X^2+(1-Y)^2+Z^2}} & \cdots③\end{cases}$$

となり，

$$①かつ②かつ③ \iff X=Y \text{ かつ } 2X^2+Z^2=1 \text{ かつ } X=\frac{2X^2+Z^2-2X}{(1-X)^2+X^2+Z^2}$$

$$\iff X=Y \text{ かつ } 2X^2+Z^2=1 \text{ かつ } X=\frac{2X^2+Z^2-2X}{2X^2+Z^2+1-2X}$$

$$\iff \begin{cases} X=Y \\ \text{かつ} \\ 2X^2+Z^2=1 & \cdots④ \\ \text{かつ} \\ X=\dfrac{1-2X}{2-2X} & \cdots⑤ \end{cases}$$

となる．

ここで，⑤の方程式を解くと，$X=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ となり，この中で④を満たす実数 Z が存在するものを考えると，$X=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ とわかる．

これを④に代入して，$Z>0$ に注意して解くと

$$Z=\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

となる．

以上と②より，連立方程式②，④，⑤を満たす X，Y，Z は

$$(X,\ Y,\ Z)=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$$

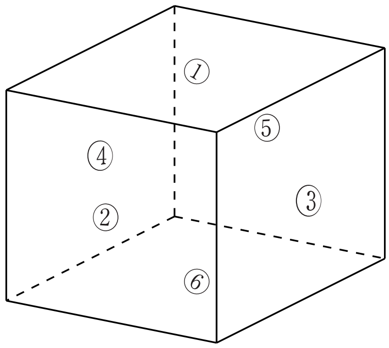
とわかる．

したがって，四面体 OABC の体積を，三角形 OAB を底面として求めると，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sqrt{2\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{6}$$

2

「辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる」という条件を(C)とし，立方体の各面に右図のような①から⑥の番号を付す．



(1)　6 面の塗り方は全部で 3^6 通りだけある．また，1 色あるいは 2 色で(C)を満たすように塗ることはできない．

3 色で塗るとき，

(C)　$\Longleftrightarrow$　①と⑥，②と⑤，③と④をそれぞれ色 a，色 b，色 c で塗る

であり，a，b，c の決め方は ${}_3\mathrm{P}_3$ 通りだけある．

よって，このような塗り方は ${}_3\mathrm{P}_3 = 6$ 通りだけあり，求める確率 p_3 は

$$p_3 = \frac{6}{3^6} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2}{243}}$$

(2)　6 面の塗り方は全部で 4^6 通りだけある．また，1 色あるいは 2 色では(C)を満たすように塗れないことについては既に(1)で述べた．

(i)　4 色のうちの 3 色で塗るとき

(1)と同様に考えて，塗り方は ${}_4\mathrm{P}_3 = 24$ 通りだけある．

(ii)　4 色すべてを用いて，かつ①と⑥を同じ色で塗るとき

(C)　$\Longleftrightarrow$　（①と⑥，②と⑤，③，④をそれぞれ色 a，色 b，色 c，色 d で塗る）

または（①と⑥，③と④，②，⑤をそれぞれ色 a，色 b，色 c，色 d で塗る）

であり，a，b，c，d の決め方は ${}_4\mathrm{P}_4$ 通りだけある．

よって，このような塗り方は $2 \cdot {}_4\mathrm{P}_4 = 48$ 通りだけある．

(iii)　4 色すべてを用いて，かつ①と⑥を異なる色で塗るとき

(C)　$\Longleftrightarrow$　①，⑥，②と⑤，③と④をそれぞれ色 a，色 b，色 c，色 d で塗る

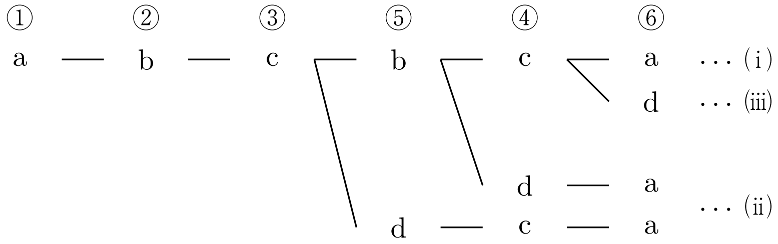
であり，a，b，c，d の決め方は ${}_4\mathrm{P}_4$ 通りだけある．

よって，このような塗り方は ${}_4\mathrm{P}_4 = 24$ 通りだけある．

(i)，(ii)，(iii)より，求める確率 p_4 は

$$p_4 = \frac{24 + 48 + 24}{4^6} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3}{128}}$$

（注）　(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)の塗り方の総数を，樹形図をかくことによって求めてもよい．

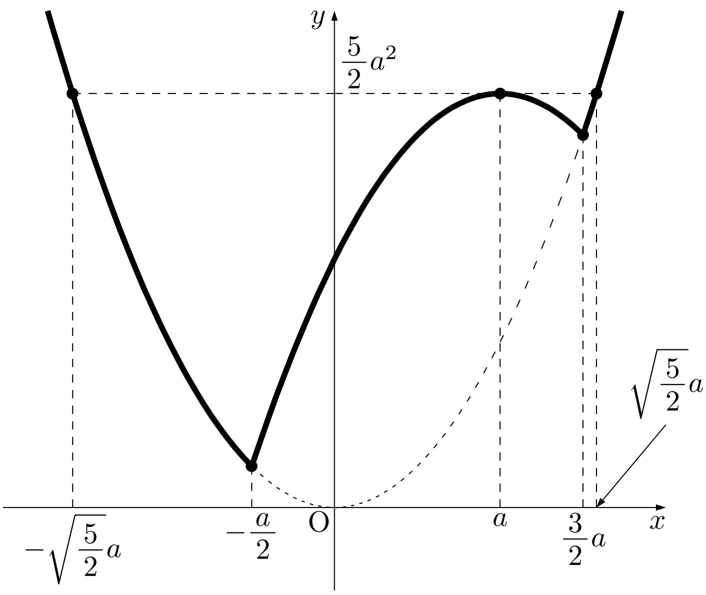


$\boxed{3}$

$x^2-\left(ax+\dfrac{3}{4}a^2\right)=\left(x-\dfrac{3}{2}a\right)\left(x+\dfrac{a}{2}\right)$ より，

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \left(x\leqq -\dfrac{a}{2},\ \dfrac{3}{2}a\leqq x\right) \\ -x^2+2ax+\dfrac{3}{2}a^2=-(x-a)^2+\dfrac{5}{2}a^2 & \left(-\dfrac{a}{2}\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}a\right) \end{cases}$$

$y=f(x)$ のグラフは下図の太線部分になる．



以下，$f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=-x^2+2ax+\dfrac{3}{2}a^2$ とする．

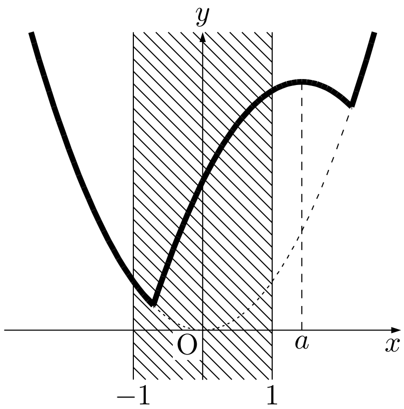
このとき，$f_1(-x)=(-x)^2=x^2=f_1(x)$ であることから，$0\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}a$ において，

$$f_1(-x)=f_1(x)\leqq f_2(x)$$

以上を踏まえて，a の値で場合分けして考える．

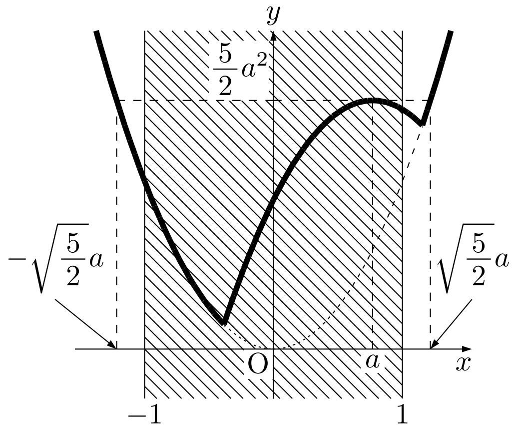
(i)　$1\leqq a$ のとき

最大値は $f_2(1)=\dfrac{3}{2}a^2+2a-1$



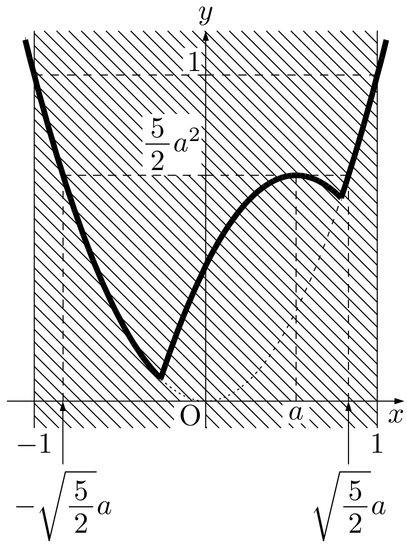
(ii)　$a < 1 \leqq \sqrt{\dfrac{5}{2}}a$，すなわち $\sqrt{\dfrac{2}{5}} \leqq a < 1$ のとき

最大値は $f_2(a) = \dfrac{5}{2}a^2$



(iii)　$0 < \sqrt{\dfrac{5}{2}}a < 1$，すなわち $0 < a < \sqrt{\dfrac{2}{5}}$ のとき

最大値は $f_1(-1) = f_1(1) = 1$



以上(i)〜(iii)より，求める最大値は，

$$\begin{cases} 0 < a < \sqrt{\dfrac{2}{5}} \text{ のとき} & 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{5}} \leqq a < 1 \text{ のとき} & \dfrac{5}{2}a^2 \\ a \geqq 1 \text{ のとき} & \dfrac{3}{2}a^2 + 2a - 1 \end{cases}$$

$\boxed{4}$

自然数 N を八進法，九進法，十進法でそれぞれ表したとき，桁数がすべて a 桁になったとすると，

$$8^{a-1} \leqq N < 8^a \quad \cdots①$$

$$9^{a-1} \leqq N < 9^a \quad \cdots②$$

$$10^{a-1} \leqq N < 10^a \quad \cdots③$$

①，②，③を満たす自然数 N が存在するためには

$$10^{a-1} < 8^a$$

となる a が存在することが必要である．両辺の常用対数をとって，

$$\log_{10} 10^{a-1} < \log_{10} 8^a$$

$$a-1 < a \cdot 3\log_{10} 2$$

$$a(1-3\log_{10} 2) < 1 \quad \cdots④$$

$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より，

$$0 < 0.0967 < 1-3\log_{10} 2 < 0.097$$

なので，④は

$$a < \frac{1}{1-3\log_{10} 2} \quad \cdots④'$$

となる．

また，

$$(10.3092\cdots=)\frac{1}{0.097} < \frac{1}{1-3\log_{10} 2} < \frac{1}{0.0967}(=10.3412\cdots)$$

よって，④$'$ を満たす整数 a について $a \leqq 10$ が成り立つ．

逆に $a=10$ のとき，$10^9 \leqq N < 8^{10}$ を満たす自然数 N について，

$$9^9 < 10^9 \leqq N < 8^{10} < 9^{10}$$

が成り立つので，②も成り立つ．

よって，求める N の最大値は $a=10$ のときに①を満たす最大の自然数 N であるから，

$$\underline{8^{10}-1}$$

$\boxed{5}$

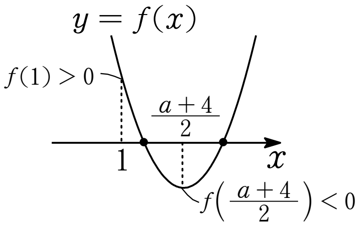
$$\begin{cases} C : y = x^2 - 4x + 5 \ (x > 1) \\ \text{直線 } y = ax + b \ (a > 0,\ b > 0) \end{cases}$$

が二つの異なる共有点を持つ条件は，2 式を連立した式

$$x^2 - (a+4)x + 5 - b = 0$$

を満たす二つの異なる実数 x が $x > 1$ で存在することである．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (a+4)x + 5 - b \\ &= \left(x - \frac{a+4}{2}\right)^2 - \frac{(a+4)^2}{4} + 5 - b \end{aligned}$$



とおくと

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

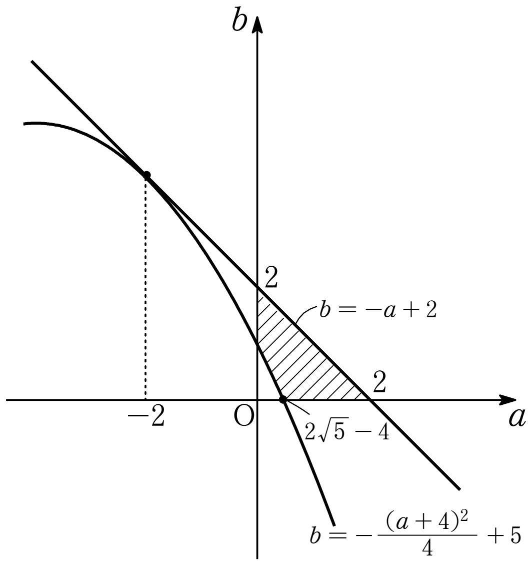
が $x > 1$ で二つの異なる共有点を持つことから，条件は

$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ y = f(x) \text{ のグラフの軸が } x > 1 \text{ に位置する} \\ f\left(\dfrac{a+4}{2}\right) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a - b + 2 > 0 \\ \dfrac{a+4}{2} > 1 \\ -\dfrac{(a+4)^2}{4} + 5 - b < 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} b < -a + 2 \\ a > -2 \\ b > -\dfrac{(a+4)^2}{4} + 5 \end{cases}$$

$a > 0$，$b > 0$ にも注意して，座標平面の点 $(a,\ b)$ が動く領域は右図斜線部分（境界線は含まず）となる．



この面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \int_0^{2\sqrt{5}-4} \left\{ -\frac{(a+4)^2}{4} + 5 \right\} da \\ &= 2 - \left[-\frac{(a+4)^3}{12} + 5a \right]_0^{2\sqrt{5}-4} \\ &= 2 - \left\{ -\frac{10\sqrt{5}}{3} + \frac{16}{3} + 5(2\sqrt{5} - 4) \right\} \\ &= \underline{\frac{50 - 20\sqrt{5}}{3}} \end{aligned}$$