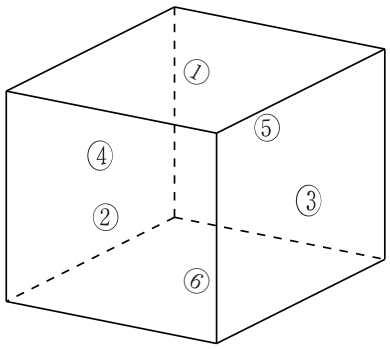
【解答例】

1



「辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる」という条件を(C)とし，立方体の各面に右図のような①から⑥の番号を付す．

(1)　6 面の塗り方は全部で 4^6 通りだけある．また，1 色あるいは 2 色で(C)を満たすように塗ることはできない．

(i)　4 色のうちの 3 色で塗るとき

(C)　$\Longleftrightarrow$　①と⑥，②と⑤，③と④をそれぞれ色 a，色 b，色 c で塗る

であり，a，b，c の決め方は ${}_4\mathrm{P}_3$ 通りだけある．

よって，このような塗り方は ${}_4\mathrm{P}_3 = 24$ 通りだけある．

(ii)　4 色すべてを用いて，かつ①と⑥を同じ色で塗るとき

(C)　$\Longleftrightarrow$　（①と⑥，②と⑤，③，④をそれぞれ色 a，色 b，色 c，色 d で塗る）
または（①と⑥，③と④，②，⑤をそれぞれ色 a，色 b，色 c，色 d で塗る）

であり，a，b，c，d の決め方は ${}_4\mathrm{P}_4$ 通りだけある．

よって，このような塗り方は $2 \cdot {}_4\mathrm{P}_4 = 48$ 通りだけある．

(iii)　4 色すべてを用いて，かつ①と⑥を異なる色で塗るとき

(C)　$\Longleftrightarrow$　①，⑥，②と⑤，③と④をそれぞれ色 a，色 b，色 c，色 d で塗る

であり，a，b，c，d の決め方は ${}_4\mathrm{P}_4$ 通りだけある．

よって，このような塗り方は ${}_4\mathrm{P}_4 = 24$ 通りだけある．

(i)，(ii)，(iii)より，求める確率 p_4 は

$$p_4 = \frac{24+48+24}{4^6} = \frac{3}{128}$$

(2)　n は十分大きいとする．

n 個の異なる色のうち，m 個の色で(C)を満たすように塗る方法の総数を x_m とする（$m \geqq 1$）．

(1)で $x_1 = x_2 = 0$ であることが言えている．また，(i)，(ii)，(iii)と同様に考え，それぞれ $x_3 = 1 \cdot {}_n\mathrm{P}_3$，$x_4 = (2+1){}_n\mathrm{P}_4 = 3 \cdot {}_n\mathrm{P}_4$ が得られ，さらに $x_5 = y \cdot {}_n\mathrm{P}_5$（$y$ は n によらない定数）であることもわかる．

$m = 6$ のとき，

(C) $\iff$ ①，②，③，④，⑤，⑥をそれぞれ色 a，色 b，色 c，色 d，色 e，色 f で塗る

であるから，$x_6 = 1 \cdot {}_n\mathrm{P}_6$ となる．

よって(1)のときと同様にして

$$p_n = \frac{1 \cdot {}_n\mathrm{P}_6 + y \cdot {}_n\mathrm{P}_5 + 3 \cdot {}_n\mathrm{P}_4 + 1 \cdot {}_n\mathrm{P}_3}{n^6} \quad \cdots (*)$$

が得られるが，$3 \leqq k \leqq 5$ のとき $6-k>0$ であることから，

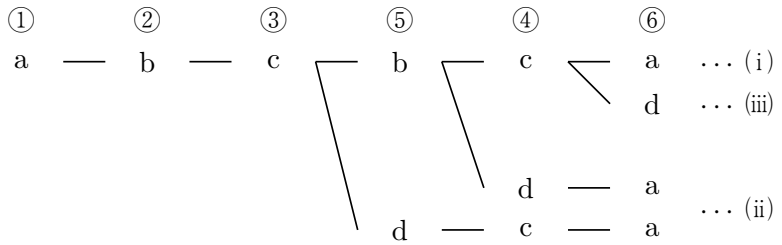
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{{}_n\mathrm{P}_k}{n^6} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^{6-k}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^{6-k}} \\ &= 0\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{{}_n\mathrm{P}_6}{n^6} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^6} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\left(1-\frac{5}{n}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

である．これらと（$*$）より，$\lim_{n\to\infty} p_n = \underset{\sim}{1}$ である．

（注）（i），(ii)，(iii)の塗り方の総数を，樹形図をかくことによって求めてもよい．



$\boxed{2}$

$y-(8+6i)=w$ とおくと，

$$z=\frac{x+y}{2}=\frac{x+w+8+6i}{2}=\frac{x+w}{2}+4+3i$$

となるので, 複素数 z が複素数平面において動く領域は

$$|x|\leqq 2,\ |w|=3,\ z'=\frac{x+w}{2}$$

を満たす複素数 z' が動く領域を実軸方向に 4，虚軸方向に 3 だけ平行移動したものである．

$|w|=3$ より，$w=3(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と表せるので

$$z'=\frac{x+3(\cos\theta+i\sin\theta)}{2}$$

$$x=2z'-3(\cos\theta+i\sin\theta)$$

よって，$|x|\leqq 2$ より，

$$|2z'-3(\cos\theta+i\sin\theta)|\leqq 2$$

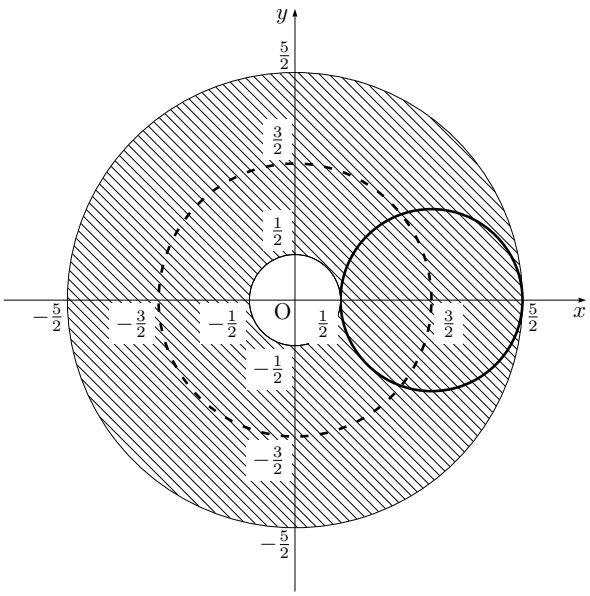
$$2\left|z'-\frac{3(\cos\theta+i\sin\theta)}{2}\right|\leqq 2$$

$$\left|z'-\frac{3(\cos\theta+i\sin\theta)}{2}\right|\leqq 1$$

これより，複素数 z' が動く領域は

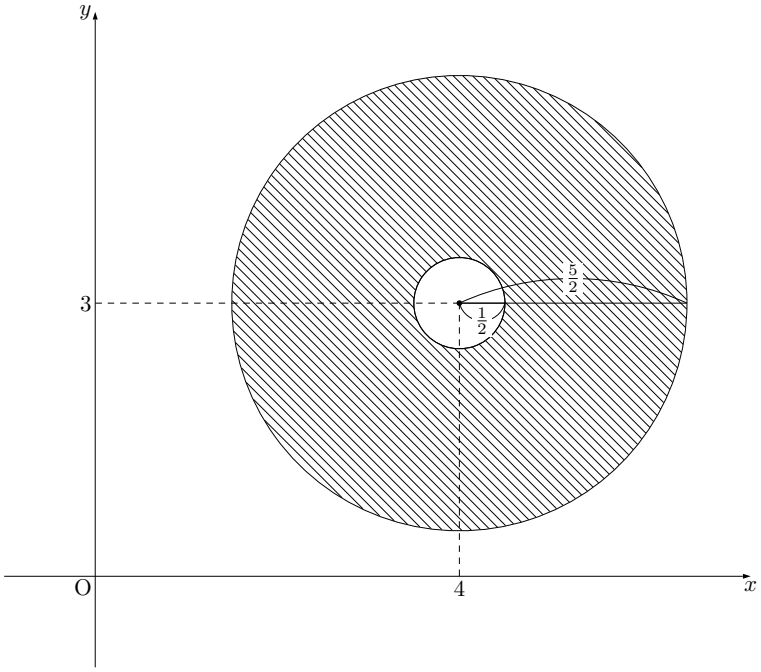
点 $\dfrac{3(\cos\theta+i\sin\theta)}{2}$ を中心とする半径 1 の円の周および内部

であり，点 $\dfrac{3(\cos\theta+i\sin\theta)}{2}$ は「原点を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円周上」を動く点であるので，領域は下図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



代々木ゼミナール

したがって，複素数 z の動く領域は下図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



また，斜線部分の面積は

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2\pi-\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi=\frac{25}{4}\pi-\frac{1}{4}\pi=\underline{6\pi}$$

3

「直線 QY と直線 PX がねじれの位置にある」とは，「4 点 P，Q，X，Y が同一平面上にある（…(∗)）」の否定であるから，以下では，まず（∗）が成り立つための x，y に関する条件を求める．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PX}} = \overrightarrow{\mathrm{OX}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + x\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PY}} = \overrightarrow{\mathrm{OY}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BY}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + y\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-y)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + y\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

である．

もし，「3 点 P，Q，X が同一直線上にある」と仮定すると，点 X は直線 PQ を含む平面 OAB 上にあることになる．点 X は直線 OC 上にあり，直線 OC と平面 OAB の交点は O のみである（4 点 O，A，B，C は同一平面上にないから）ので，X = O である．ここから「3 点 P，Q，O が同一直線上にある」ことになり，不合理．よって，3 点 P，Q，X は同一直線上にない．

したがって，（∗）が成り立つための条件は

「同一直線上にない相異なる 3 点 P，Q，X と Y に対して $\overrightarrow{\mathrm{PY}} = s\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ を満たす（…①）」実数 s，t が存在する

ことであり，①を同値変形すると，

$$① \iff \begin{cases} \text{同一平面上にない相異なる 4 点 O，A，B，C に対して} \\ \quad -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-y)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + y\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + x\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \\ \text{が成り立つ} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \text{同一平面上にない相異なる 4 点 O，A，B，C に対して} \\ \quad -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-y)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + y\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\dfrac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + xt\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ \text{が成り立つ} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{t}{2} \\ \text{かつ} \\ 1-y = \dfrac{s}{2} \\ \text{かつ} \\ y = xt \end{cases}$$

$$\iff t = 1 \text{ かつ } y = x \text{ かつ } s = 2-2y$$

となる．

よって，①が成り立つような実数 s，t が存在するための x，y に関する条件は

$$x = y$$

とわかる．

これの否定を考えて，「直線 QY と直線 PX がねじれの位置にある」ための x，y に関する必要十分条件は，

$$x \neq y$$

$\boxed{4}$

$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$（$m$ は自然数）がすべて奇数のとき

$$a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{2}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

変形して

$$a_{n+1}+1=\frac{3}{2}(a_n+1)$$

数列 $\{a_n+1\}$ は公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n+1=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

すなわち

$$a_0+1=\frac{2^n(a_n+1)}{3^n}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

(1)　$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ がすべて奇数であるとき

$$a_0+1=\frac{2^3(a_3+1)}{3^3}$$

a_0+1 は整数であるから，a_3+1 は偶数かつ 3^3 を約数にもつ．

a_0 が最小になるための条件は $a_3+1=2\cdot 3^3$ であることで $a_0+1=2^4$

ゆえに，$a_0=15$

このとき

$$a_1=\frac{3a_0+1}{2}=23,\quad a_2=\frac{3a_1+1}{2}=35,\quad a_3=\frac{3a_2+1}{2}=53$$

となり，$a_1,\ a_2,\ a_3$ も奇数である．

よって，$a_0=15$

(2)　$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{10}$ がすべて奇数であるとき

$$a_0+1=\frac{2^{10}(a_{10}+1)}{3^{10}}$$

a_0+1 は整数であるから，$a_{10}+1$ は偶数かつ 3^{10} を約数にもつ．

a_0 が最小になるための条件は $a_{10}+1=2\cdot 3^{10}$ であることで $a_0+1=2^{11}$

ゆえに，$a_0=2047$

このとき

$$a_1=\frac{3a_0+1}{2}=\frac{3(2^{11}-1)+1}{2}=3\cdot 2^{10}-1$$

同様にして $a_n=3^n\cdot 2^{11-n}-1\ \ (n=2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$ となり，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ も奇数である．

よって，$a_0=2047$

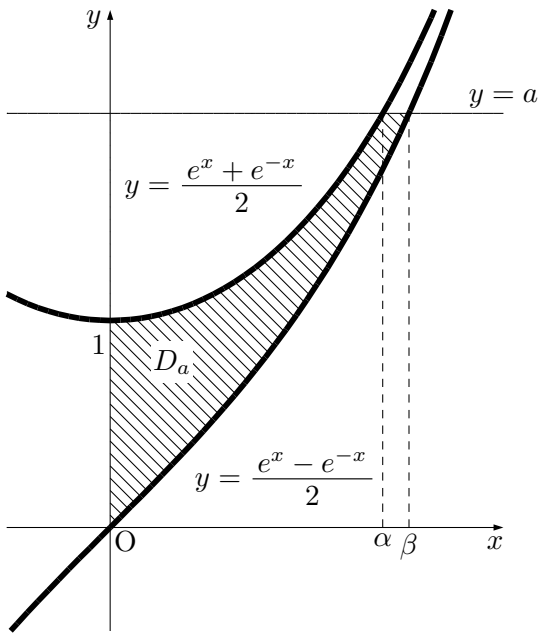
5

(1)　$x \geqq 0$，$a \geqq 1$ において考える．

$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ かつ $y = a$ より $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = a$，すなわち $(e^x)^2 - 2ae^x + 1 = 0$ が得られ，これを解くと $e^x = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ となるが，今，$e^x \geqq e^0 = 1$ なので $e^x = a + \sqrt{a^2 - 1}$

$\left(a \geqq 1 \text{ より } a - \sqrt{a^2 - 1} \left(= \dfrac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}}\right) \leqq 1 \text{ である}\right)$，すなわち $x = \log\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)$ となる．同様に $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ かつ $y = a$ より $x = \log\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)$ となる．

さらに $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0$ であることから D_a は次図の斜線部分のようになる．



$\alpha = \log\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)$，$\beta = \log\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)$ とすると，

$$e^\alpha = a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad e^{-\alpha} = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}} = a - \sqrt{a^2 - 1}$$

$$e^\beta = a + \sqrt{a^2 + 1}, \quad e^{-\beta} = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 + 1}} = -a + \sqrt{a^2 + 1}$$

となる．これらから，

$$\begin{aligned} S_a &= \int_0^\beta \left(a - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) dx - \int_0^\alpha \left(a - \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) dx \\ &= \left[ax - \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]_0^\beta - \left[ax - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^\alpha \\ &= a\beta - \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + 1 - a\alpha + \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \end{aligned}$$

$$= a\left\{\log\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)-\log\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\right\}-\frac{\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)+\left(-a+\sqrt{a^2+1}\right)}{2}$$
$$+1+\frac{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)-\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)}{2}$$

$$= a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}+1$$

(2)　$a=\dfrac{1}{t}$ とおくと，$a\to\infty$ のとき $t\to+0$ であり，

$$a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}=\frac{1}{t}\log\frac{\dfrac{1}{t}+\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}}{\dfrac{1}{t}+\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-1}}=\frac{\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{1+\sqrt{1-t^2}}}{t}\ (=A_t\text{とする})$$

である．ここで，

$$f(t)=\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{1+\sqrt{1-t^2}}=\log\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)-\log\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)$$

とおくと，

$$f'(t)=\frac{1}{1+\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$$

であり，$f(0)=0$ および $f'(0)=0$ もふまえ

$$\lim_{t\to0}A_t=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)=0$$

を得る（微分係数の定義を用いた）．

よって

$$\lim_{a\to\infty}a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}=\lim_{t\to+0}A_t=0$$

である．さらに

$$\lim_{a\to\infty}\left(-\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)=\lim_{a\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}=0$$

であり，これらと(1)の結果から，

$$\lim_{a\to\infty}S_a=1$$

＜参考＞

$$a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}=a\log\left(1+\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$$

$$=\frac{2a}{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)}\log\left\{1+\frac{2}{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)}\right\}^{\frac{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)}{2}}$$

$$=\frac{2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\right)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)}\log\left\{1+\frac{2}{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)}\right\}^{\frac{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)}{2}}$$

と強引に変形し，公式 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ を利用して極限を計算する方法もあります．

6

a_k の整数部分が n 桁であるとすると

$$10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 10^n$$

各辺に底が 10 の対数をとり

$$n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10}2 < n$$

すなわち

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 \leqq k < \left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2 \quad \cdots①$$

また，a_k の整数部分は n 桁で最高位の数字が 1 であるとすると

$$10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 2\cdot 10^{n-1}$$

各辺に底が 10 の対数をとり

$$n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10}2 < \log_{10}2+n-1$$

すなわち

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 \leqq k < \left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 \quad \cdots②$$

一般に，実数 x，y に対して $x \leqq k < y$ を満たす整数 k の個数 M_n について，不等式

$$y-x-1 < M_n < y-x+1$$

が成り立つ．（…（＊））

よって，①を満たす自然数 k の個数 N_n，②を満たす自然数 k の個数 L_n について

$$\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-1 < N_n < \left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2+1$$

$$\left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-1 < L_n < \left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2+1$$

が成り立ち，

$$\frac{\left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-1}{\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2+1} < \frac{L_n}{N_n} < \frac{\left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2+1}{\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-1}$$

すなわち

$$\frac{2(n-1)\log_{10}2}{2n-1+(\log_{10}2)^2} < \frac{L_n}{N_n} < \frac{2(n-1)\log_{10}2+2(\log_{10}2)^2}{2n-1-(\log_{10}2)^2}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)\log_{10}2}{2n-1+(\log_{10}2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\log_{10}2}{2+\dfrac{-1+(\log_{10}2)^2}{n}}$$
$$=\log_{10}2$$

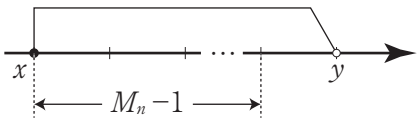
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)\log_{10}2+2(\log_{10}2)^2}{2n-1-(\log_{10}2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\log_{10}2+\dfrac{2(\log_{10}2)^2}{n}}{2-\dfrac{1+(\log_{10}2)^2}{n}}$$
$$=\log_{10}2$$

よって，はさみうちの原理を用いて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n}=\log_{10}2$$

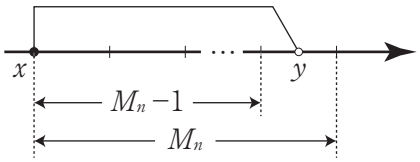
（注）　（＊）が成り立つことは x，y が整数か非整数かで場合分けをし，下のような数直線をかいてみればわかる．（これらは $M_n=0$，1 の場合でも成り立っている．）

(i)　x，y がともに整数のとき



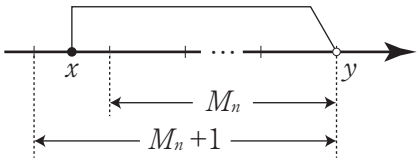
$M_n=y-x$

(ii)　x が整数，かつ y が非整数のとき



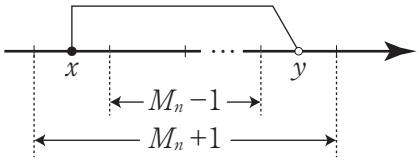
$M_n-1<y-x<M_n$

(iii)　x が非整数，かつ y が整数のとき



$M_n<y-x<M_n+1$

(iv)　x，y がともに非整数のとき



$M_n-1<y-x<M_n+1$