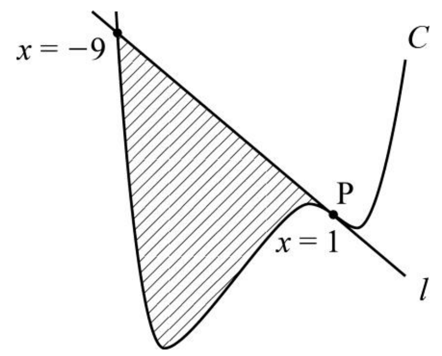
1

$f(x)=x^4+6x^3-24x^2$ について.

(1)
$$f'(x)=4x^3+18x^2-48x$$
$$f''(x)=12x^2+36x-48=12(x+4)(x-1)$$
なので, $C: y=f(x)$ の変曲点の x 座標は,
$$x=-4,\ 1$$
また,
$$f(x)=x^2(x^2+6x-24)=x^2\{(x+4)(x+2)-32\}$$
とかけるので,
$$f(-4)=16\cdot(-32)=-512$$
$$f(1)=5\cdot 3-32=-17$$
よって, 求める変曲点は,
$(-4,\ -512)$, $(1,\ -17)$ …(答)

(2) (1)より,
$\mathrm{P}(1,\ -17)$
よって, 点 P での C の接線 l は,
$$y+17=f'(1)(x-1)$$
$$\therefore\ y=-26x+9 \quad \cdots(\text{答})$$

(3) C と l の共有点の x 座標は,
$$f(x)=-26x+19$$
$$\therefore\ x^4+6x^3-24x^2+26x-9=0 \quad \cdots\bigstar$$
を満たす. これが, $x=1$ で重解をもつことに注意して,
$$(x-1)^2(x^2+8x-9)=0$$
$$\therefore\ (x-1)^3(x+9)=0$$
よって,
$x=1$（3 重解）, -9
これより, 求める面積 S は, 次図の斜線部分の面積.



よって,
$$S=\int_{-9}^{1}\{(-26x+9)-f(x)\}dx$$
$$=\int_{-9}^{1}\{-(x-1)^3(x+9)\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}(x-1)^4(x+9)\right]_{-9}^{1}-\int_{-9}^{1}\left\{-\frac{1}{4}(x-1)^4\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{20}(x-1)^5\right]_{-9}^{1}$$
$$=5000 \quad \cdots(\text{答})$$

2

$$s=\sin\theta,\quad c=\cos\theta,\quad t=\tan\theta$$

とする．いま，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，

$$0<s<1,\quad 0<c<1,\quad t>0$$

であり，

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\left\{1-c-\sqrt{3}(t-s)\right\},\ \frac{1}{2}\left\{\sqrt{3}(1-c)+t-s\right\}\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}\left\{1+c-\sqrt{3}(t+s)\right\},\ \frac{1}{2}\left\{\sqrt{3}(1+c)+t+s\right\}\right)$$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2c-2\sqrt{3}s\\ 2\sqrt{3}c+2s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\\ \sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\end{pmatrix}\quad\cdots(\text{答})$$

また，線分 PQ の中点 M について，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}t\\ \sqrt{3}+t\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}\tan\theta\\ \sqrt{3}+\tan\theta\end{pmatrix}\quad\cdots(\text{答})$$

(2)　$t=\dfrac{s}{c}$ とかけるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-c-\sqrt{3}\left(\dfrac{s}{c}-s\right)\\ \sqrt{3}(1-c)+\dfrac{s}{c}-s\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2c}\begin{pmatrix}c(1-c)-\sqrt{3}s(1-c)\\ \sqrt{3}c(1-c)+s(1-c)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1-c}{2c}\begin{pmatrix}c-\sqrt{3}s\\ \sqrt{3}c+s\end{pmatrix}$$

とかけて，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}c-\sqrt{3}s\\ \sqrt{3}c+s\end{pmatrix}$$

なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1-c}{2c}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

とかける．よって，3 点 O，P，Q は同一直線上にあるといえる．

（証明終り）

(3)　(2)と $0<c<1$ より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\left|\frac{1-c}{2c}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\frac{1-c}{2c}\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$$

また，点 M は線分 PQ の中点なので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$$

したがって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|$ となる条件は，

$$\frac{1-c}{2c}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 1-c=c$$

よって，

$$c=\frac{1}{2}$$

いま，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，

$$\theta=\frac{\pi}{3}\quad\cdots(\text{答})$$

3

10 枚のカードをすべて区別し，10 枚のカードをすべて取り出すとして全事象を考える．このとき，全事象は，

$10!$（通り） …★

(1) ★のうち，A_{10} となるものは，

10 枚目に 1 を取り出すこと

なので，

$9!\times 1 = 9!$（通り）

よって，その確率 p_1 は，

$$p_1 = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10} \quad \cdots（答）$$

(2) ★のうち，$A_9 \cap B_1$ となるものを考える．

$A_9 \cap B_1$ となるためには，

9 枚目に 1 を取り出すこと …♡

が必要である．また，このとき，9 枚目までに取り出されていないカードが 1 枚だけあるが，番号 2，番号 3，番号 4 のカードはいずれも 2 枚以上存在するので，8 枚目までに番号 2，番号 3，番号 4 はすべて少なくとも 1 枚ずつ取り出されている．したがって，♡のとき，$A_9 \cap B_1$ となる．

以上より，$A_9 \cap B_1$ となることは，

9 枚目に 1 を取り出すこと

であるから，9 枚目に 1 を置き，10 枚目に 1 以外の 9 枚のうちいずれかを置き，残りの 8 枚を 1 枚目から 8 枚目まで並べることを考えて，

$1\cdot 9\cdot 8!$（通り）

よって，その確率 p_2 は，

$$p_2 = \frac{1\cdot 9\cdot 8!}{10!} = \frac{1}{10} \quad \cdots（答）$$

(3) ★のうち，A_9 となるものを考える．

(2)と同様に，番号 2，番号 3，番号 4 のカードはいずれも 2 枚以上存在することに注意すると，A_9 となることは，

9 枚目に 1 を取り出すこと …♡

または

9 枚目，10 枚目のいずれも 2 を取り出すこと …◇

(2)より，♡となる確率は，

$$p_2 = \frac{1}{10}$$

また，◇となる確率 p_3 は，

$$p_3 = \frac{2!\cdot 8!}{10!} = \frac{1}{45}$$

よって，求める条件付き確率 q は，

$$q = \frac{p_2}{p_2 + p_3} = \frac{9}{11} \quad \cdots（答）$$

4

以下，合同式は，4 を法とする．

(1) 整数 m は偶数か奇数である．

（ア）m が偶数のとき

$m=2l$ (l は整数) とおけて，

$$m^2=(2l)^2=4l^2$$

となり，

m^2 を 4 で割った余りは 0

（イ）m が奇数のとき

$m=2l+1$ (l は整数) とおけて，

$$m^2=(2l+1)^2=4(l^2+l)+1$$

となり，

m^2 を 4 で割った余りは 1

以上より，m^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である．

（証明終り）

(2) 自然数 n, k が

$$25\times3^n=k^2+176 \quad \cdots(*)$$

を満たすとき，n を奇数とすると，

$n=2p-1$ （p は自然数）

とおけて，$(*)$は，

$$25\times3^{2p-1}=k^2+176$$

$$\therefore k^2=25\times3\cdot9^{p-1}-176 \quad \cdots★$$

とかける．ここで，

$$25\equiv1$$
$$9^{p-1}\equiv1$$
$$176\equiv0$$

であるから，★より，

$$k^2\equiv1\times3\cdot1-0\equiv3$$

よって，k^2 を 4 で割った余りは 3 となり．(1)に矛盾する．したがって，背理法により，$(*)$を満たすとき，n は偶数である．

（証明終り）

(3) (2)より，$(*)$を満たすためには，

n が偶数

であることが必要．このとき，自然数 n は，

$n=2p$ （p は自然数）

とおけて，$(*)$は，

$$25\times3^{2p}=k^2+176$$

$$\therefore (5\cdot3^p-k)(5\cdot3^p+k)=176$$

とかける．いま，

$$176=2^4\cdot11$$

とかけ，n, k は自然数より，

$$5\cdot3^p-k<5\cdot3^p+k$$

であることに注意すると，

$$\begin{pmatrix}5\cdot3^p-k\\5\cdot3^p+k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\176\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\88\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\44\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\22\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix}$$

それぞれについて，$(3^p, k)$を求めると，

$$\left(\frac{177}{10}, \frac{175}{2}\right), (9, 43), \left(\frac{24}{5}, 20\right), (3, 7), \left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}\right)$$

となる．これらのうち，p, k がともに自然数となるものを考えて，

$(p, k)=(2, 43), (1, 7)$

よって，$n=2p$ より，

$(n, k)=(4, 43), (2, 7)$ …(答)