$\boxed{1}$ (1)　C と ℓ の式から y を消去して

$$x^2-kx-1=0 \quad \cdots\cdots ①$$

これの解が P，Q の x 座標だから，解と係数の関係より

$$x_{\mathrm{P}}+x_{\mathrm{Q}}=k$$

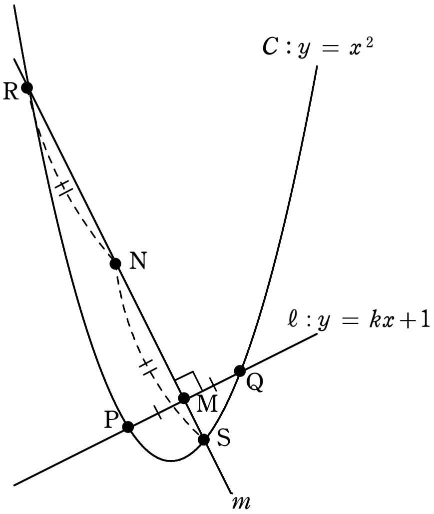
が成り立つ。よって，線分 PQ の中点 M の x 座標は

$$\frac{x_{\mathrm{P}}+x_{\mathrm{Q}}}{2}=\frac{k}{2}$$

これを ℓ の式に代入することで，M の y 座標は

$$k\cdot\frac{k}{2}+1=\frac{k^2+2}{2}$$

よって，M の座標は $\left(\frac{k}{2},\ \frac{k^2+2}{2}\right)$ である。



(2)　直線 m は ℓ に直交するから，傾きが $-\frac{1}{k}$ である。

また，直線 m は (1) で求めた点 M を通るので，m の式は

$$y=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{k}{2}\right)+\frac{k^2+2}{2} \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{k}x+\frac{k^2+3}{2}$$

これと C の式から y を消去して

$$x^2+\frac{1}{k}x-\frac{k^2+3}{2}=0$$

これの解が R，S の x 座標だから，解と係数の関係より

$$x_{\mathrm{R}}+x_{\mathrm{S}}=-\frac{1}{k}$$

が成り立つ。よって，線分 RS の中点 N の x 座標は

$$\frac{x_{\mathrm{R}}+x_{\mathrm{S}}}{2}=-\frac{1}{2k}$$

これを m の式に代入することで，N の y 座標は

$$-\frac{1}{k}\cdot\left(-\frac{1}{2k}\right)+\frac{k^2+3}{2}=\frac{1}{2}\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right)+\frac{3}{2}$$

相加・相乗平均の関係より

$$\frac{1}{2}\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right)\geqq\sqrt{k^2\cdot\frac{1}{k^2}}=1 \qquad \therefore\ \frac{1}{2}\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right)+\frac{3}{2}\geqq\frac{5}{2}$$

等号成立条件は

$$k^2=\frac{1}{k^2} \qquad \therefore\ k^4=1 \qquad \therefore\ k=1\ (\because\ k>0)$$

したがって，点 N の y 座標は，$k=1$ のとき最小となる。
このとき，方程式 ① から

$$x^2-x-1=0 \qquad \therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \qquad \therefore\ x^2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\ \text{（複号同順）}$$

よって，P と Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

2 (1) $t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき

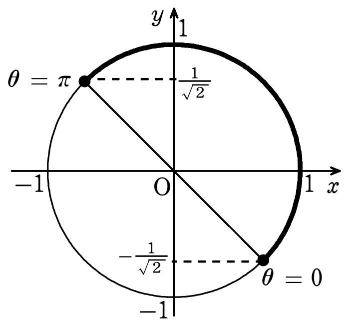
$$t^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-\sin 2\theta \qquad \therefore\ \sin 2\theta=1-t^2$$

したがって

$$f(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta-\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-t^2)-t$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}t^2-t+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2) $t=\sin\theta-\cos\theta$ から $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ とでき，



$0\leqq\theta\leqq\pi$ から $-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$ なので

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1 \qquad \therefore\ -1\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

$g(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}t^2-t+\frac{1}{\sqrt{2}}$ とすると

$$g(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$y=g(t)$ のグラフより，$f(\theta)$ の最大値は

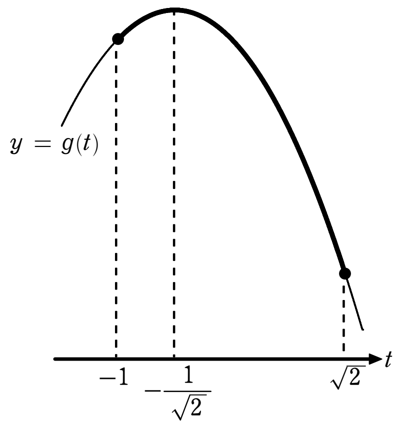
$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

であり，このとき

$$t=-\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\iff \theta-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}$$

$$\iff \theta=\frac{\pi}{12}$$



$f(\theta)$ の最小値は

$$g(\sqrt{2})=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

であり，このとき

$$t=\sqrt{2} \iff \sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1 \iff \theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \iff \theta=\frac{3}{4}\pi$$

(3) $\frac{t}{\sqrt{2}}=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ から，t を 1 つ決めたときの対応する θ の個数は

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\frac{t}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ または $\frac{t}{\sqrt{2}}=1$ ，すなわち

$-1\leqq t<1$ または $t=\sqrt{2}$ のとき，1 個

$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\frac{t}{\sqrt{2}}<1$ ，すなわち $1\leqq t<\sqrt{2}$ のとき，2 個

である。よって，$f(\theta)=a$ となる θ がちょうど 2 個となるのは

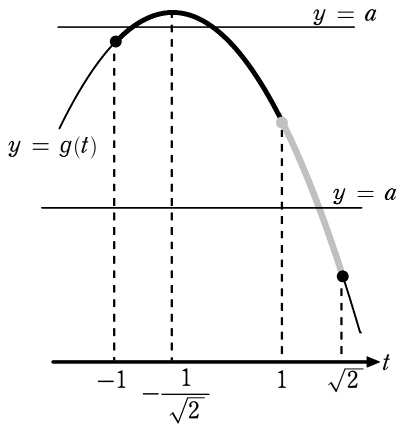
$y=g(t)$ と $y=a$ が，「$-1\leqq t<1$，$t=\sqrt{2}$ において 2 点で交わる」または「$1\leqq t<\sqrt{2}$ において 1 点で交わり，かつ他の交点が $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ に無い」ときである。

右のグラフの

　　黒太部分は θ が 1 個出てくるところ

　　灰色部分は θ が 2 個出てくるところ

である。



以上から，求める a の範囲は

$$g(\sqrt{2}) < a \leqq g(1) \quad \text{または} \quad g(-1) \leqq a < g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{-\frac{3\sqrt{2}}{2} < a \leqq -1 \quad \text{または} \quad 1 \leqq a < \frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

$\boxed{3}$ 1個のさいころを n 回投げたときの目の出方は，全部で 6^n 通り。

(1) 最大公約数が 3 となる確率を $p(3)$ とする。$p(3)$ は

n 回とも「3 か 6」が出ることから，n 回とも 6 が出ることを除いた確率

なので

$$p(3) = \underline{\frac{2^n-1}{6^n}}$$

(2) 最大公約数が k となる確率を $p(k)$ とする。（$k = 1, 2, \cdots, 6$）

(1) から

$$p(3) = \frac{2^n-1}{6^n}$$

また，$p(6)$，$p(5)$，$p(4)$ はそれぞれ

n 回とも 6 が出る確率，n 回とも 5 が出る確率，n 回とも 4 が出る確率

であるから

$$p(6) = p(5) = p(4) = \frac{1}{6^n}$$

$p(2)$ は

n 回とも「2 か 4 か 6」が出ることから，

「n 回とも 4 が出る」ことと「n 回とも 6 が出る」ことを除いた確率

であるから

$$p(2) = \frac{3^n-2}{6^n}$$

$p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6) = 1$ が成り立つから

$$\begin{aligned} p(1) &= 1-\{p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)\} \\ &= 1-\left(\frac{3^n-2}{6^n}+\frac{2^n-1}{6^n}+3\cdot\frac{1}{6^n}\right) \\ &= \underline{\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n}} \end{aligned}$$

4 (1) $C_1 : y = 2x^2$ から $y' = 4x$ なので，点 $(t,\ 2t^2)$ における接線の式は

$$y = 4t(x-t)+2t^2 \qquad \therefore\ \ y = 4tx-2t^2 \quad \cdots\cdots ①$$

C_2 と ① から y を消去して

$$x^2+(4t-2)x+\frac{19}{8}-2t^2 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

C_2 と ① が接する条件は，② が重解をもつことで，その条件は

$$\frac{(\text{判別式})}{4} = (2t-1)^2-\left(\frac{19}{8}-2t^2\right) = 0$$

$$\iff \quad 6t^2-4t-\frac{11}{8} = 0$$

$$\iff \quad (4t+1)(12t-11) = 0 \qquad \therefore\ \ t = -\frac{1}{4},\ \frac{11}{12}$$

これらを ① に代入することで，求める接線の式は

$$\boldsymbol{y = -x-\frac{1}{8},\ \ y = \frac{11}{3}x-\frac{121}{72}}$$

(2) (1) で求めた接線のうち，傾きが負であるものは

$$y = -x-\frac{1}{8}$$

なので，これが直線 ℓ である。

右図のように点 A，B，C を定めて，求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{0} 2x^2\,dx-(\triangle\text{ABC の面積})$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{4}}^{0}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}$$

$$= 0-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3-\frac{1}{2^7}$$

$$= \frac{1}{3\cdot 2^5}-\frac{1}{2^7}$$

$$= \frac{4-3}{3\cdot 2^7}$$

$$= \frac{1}{384}$$