1

$|\overrightarrow{AB}|=1$, $|\overrightarrow{AC}|=2$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6}$

(1) $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6}$ より

$$|\overrightarrow{BC}|^2=6$$

であり,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BC}|^2&=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2\\&=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2\\&=2^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+1^2\\&=5-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

なので,

$$5-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=6$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\quad\cdots(答)$$

(2) 条件より, 線分 AP は△ABC の外接円の直径なので,

$$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AO}$$

よって, $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ (s, t は実数)とおくとき,

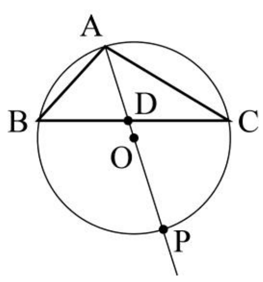
$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}=\frac{s}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}\quad\cdots①$$

ここで, 点 O は△ABC の外接円の中心なので,

$$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{CO}|$$

が成り立つ. このとき,

$$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{BO}|^2 \text{ かつ } |\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{CO}|^2$$



が成り立ち,

$$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{BO}|^2$$

$$\Leftrightarrow\ |\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}|^2$$

$$\Leftrightarrow\ |\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{AO}|^2-2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\quad\cdots②$$

同様にして,

$$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{CO}|^2$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=2\quad\cdots③$$

また, (1)の結果と①を用いて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}&=\left(\frac{s}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\frac{s}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\frac{s}{2}\cdot1^2+\frac{t}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{s}{2}-\frac{t}{4}\end{aligned}$$

同様にして,

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{s}{4}+2t$$

なので, これらと②③より,

$$\frac{s}{2}-\frac{t}{4}=\frac{1}{2} \text{ かつ } -\frac{s}{4}+2t=2$$

$$\therefore\ (s,\ t)=\left(\frac{8}{5},\ \frac{6}{5}\right)\quad\cdots(答)$$

(3) (2)より,

$$\overrightarrow{AP}=\frac{8}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}\overrightarrow{AC}$$

点 D は直線 AP 上にあるから, k を実数として,

$$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}\quad\cdots★$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AD}=\frac{8k}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{6k}{5}\overrightarrow{AC}\quad\cdots㋐$$

また, 点 D は直線 BC 上にあるから, l を実数として,

$$\overrightarrow{BD}=l\overrightarrow{BC}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AD}=(1-l)\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}\quad\cdots㋑$$

よって, ㋐㋑より,

$$\frac{8k}{5}=1-l \text{ かつ } \frac{6k}{5}=l$$

$$\therefore\ (k,\ l)=\left(\frac{5}{14},\ \frac{3}{7}\right)$$

このとき, ★より,

$$\overrightarrow{AD}=\frac{5}{14}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{7}\left(4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right)\quad\cdots☆$$

ここで,

$$\begin{aligned}|4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}|^2&=16|\overrightarrow{AB}|^2+24\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+9|\overrightarrow{AC}|^2\\&=16\cdot1^2+24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+9\cdot2^2\\&=40\end{aligned}$$

よって,

$$|4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{10}$$

なので, ☆より,

$$|\overrightarrow{AD}|=\frac{2\sqrt{10}}{7}\quad\cdots(答)$$

2

(1) 直線 l の式は,

$16x+9y=1$ …(＊)

よって,(＊)を満たす整数の組 (x, y) が求めるもの. ここで,

(＊) $\Leftrightarrow$ $16(x-4)=-9(y+7)$

とできて, 16 と 9 は互いに素なので, k を整数として,

$(x-4,\ y+7)=(-9k,\ 16k)$

$\therefore (x, y)=(-9k+4,\ 16k-7)$ …(答)

(2) (1)より, l 上の格子点 P_k は,

$P_k(-9k+4,\ 16k-7)$ (k は整数)

と表せる. 直線 l は第 1 象限を通過しているが, 直線 l 上の格子点は, 第 2 象限か第 4 象限のいずれかに存在し, 第 1 象限, 第 3 象限には存在しない. また, これらの格子点は等間隔に並んでいる. したがって, 原点との距離が最小となる格子点 A, 2 番目に小さい格子点 B は x 座標の絶対値が小さいもの 2 つを比較することで決まる. よって,

$P_0(4,\ -7)$, $P_1(-5,\ 9)$

について考えると,

$$OP_0=\sqrt{4^2+(-7)^2}=\sqrt{65}$$

$$OP_1=\sqrt{(-5)^2+9^2}=\sqrt{106}$$

なので, 点 A は P_0 と等しく, 点 B は P_1 と等しい. よって,

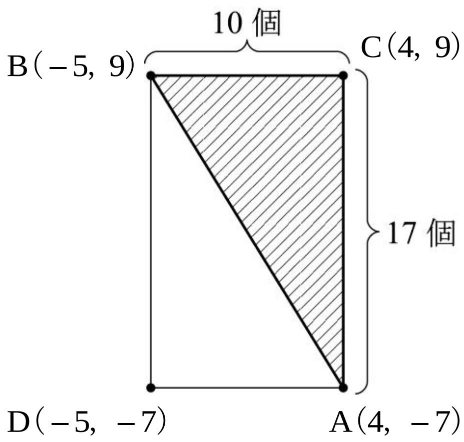
$A(4,\ -7)$, $B(-5,\ 9)$

したがって, $C(4,\ 9)$ で, 求める格子点の個数 N は, 図の斜線部分とその周上に存在する格子点の個数となる. 線分 AB 上には, A, B 以外の格子点は存在せず, $D(-5,\ -7)$ として長方形 ACBD に含まれる格子点の個数が,

$17\times 10=170$ (個)

であることを利用して,

$$N=\frac{170-2}{2}+2=86 \text{ (個)} \quad \cdots\text{(答)}$$



(2)の別解

(1)より, l 上の格子点 P_k は,

$P_k(-9k+4,\ 16k-7)$ (k は整数)

と表せる. このとき,

$$OP_k=\sqrt{(-9k+4)^2+(16k-7)^2}$$
$$=\sqrt{337k^2-296k+65}$$
$$=\sqrt{k(337k-296)+65}$$

とかけて,

$y=x(337x-296)+65$

のグラフが右のようになることから, OP_k を最小とする条件は,

$k=0$

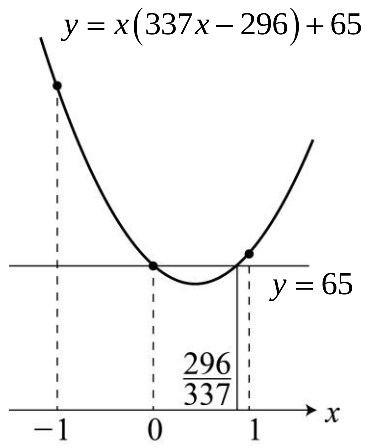
また, OP_k を 2 番目に小さい値とする条件は,

$k=1$

よって, 点 A は P_0 と等しく, 点 B は P_1 と等しい. よって,

$A(4,\ -7)$, $B(-5,\ 9)$

(以下, 同様)



3

1 個のさいころを n 回投げたときの目の出方は全部で,

6^n 通り

(1) 最大公約数が 3 となる確率を $p(3)$ とする. $p(3)$ は,

n 回とも「3 か 6」が出ることから,

n 回とも 6 が出ることを除いた確率

なので,

$$p(3)=\frac{2^n-1}{6^n} \quad \cdots(答)$$

(2) 最大公約数が k となる事象の確率を $p(k)$ とする.

k のとり得る値は, 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれか.

(1)より,

$$p(3)=\frac{2^n-1}{6^n}$$

また, $p(6)$, $p(5)$, $p(4)$ は, それぞれ,

n 回とも 6 が出る確率,

n 回とも 5 が出る確率,

n 回とも 4 が出る確率

であるから,

$$p(6)=p(5)=p(4)=\frac{1}{6^n}$$

$p(2)$ は,

n 回とも「2 か 4 か 6」が出ることから,

「n 回とも 4 が出る」と「n 回とも 6 が出る」ことを除いた確率

であるから,

$$p(2)=\frac{3^n-2}{6^n}$$

また,

$$p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=1$$

であるから,

$$\begin{aligned} p(1)&=1-\{p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)\}\\ &=1-\left(\frac{3^n-2}{6^n}+\frac{2^n-1}{6^n}+3\times\frac{1}{6^n}\right)\\ &=\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n} \quad \cdots(答) \end{aligned}$$

(3) 最小公倍数が 20 となる条件は,

n 回とも「1 か 2 か 4 か 5」が出る

かつ

少なくとも 1 回 4 が出る

かつ

少なくとも 1 回 5 が出る

を満たすこと. したがって, 求める確率 q は,

n 回とも「1 か 2 か 4 か 5」が出る確率 r_1 から

「(4 が 1 回も出ない)または(5 が 1 回も出ない)」確率 r_2

を除いた確率

である. このとき, 4 が 1 回も出ないことは,

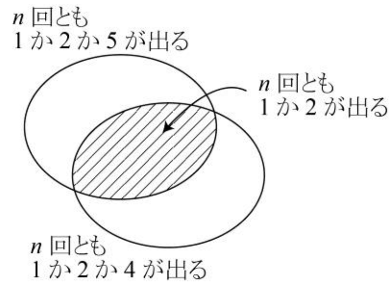
n 回とも「1 か 2 か 5」が出る

ことであり, 5 が 1 回も出ないことは,

n 回とも「1 か 2 か 4」が出る

ことである.

よって, 右のベン図を用いて,



$$r_2=\frac{3^n+3^n-2^n}{6^n}$$

また,

$$r_1=\frac{4^n}{6^n}$$

なので,

$$q=r_1-r_2=\frac{4^n-2\cdot 3^n+2^n}{6^n} \quad \cdots(答)$$

4

$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ について．

(1)　すべての自然数 n に対して，

$$0<a_n<1 \quad \cdots Ⓐ$$

であることを数学的帰納法で示す．

（ア）　$a_1=\alpha$ で，$0<\alpha<1$ より，

$$0<a_1<1$$

といえ，$n=1$ のとき，Ⓐは成り立つ．

（イ）　$n=k$（k は自然数）のとき，Ⓐが成り立つとすると，

$$0<a_k<1 \quad \cdots ①$$

このとき，$a_{k+1}=f(a_k)=\sin\dfrac{\pi a_k}{2}$ において，$0<\dfrac{\pi a_k}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\sin\dfrac{\pi a_k}{2}<1$ であるから，

$$0<a_{k+1}<1$$

といえ，$n=k+1$ のとき，Ⓐは成り立つ．

以上(ア)(イ)より，$n=1, 2, 3, \cdots$ のとき，Ⓐは成り立つ．

また，このとき，すべての自然数 n に対して，

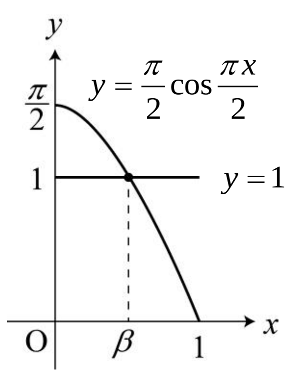
$$a_{n+1}>a_n \quad \cdots Ⓑ$$

であることを示す．そこで，$g(x)=f(x)-x$ とおくと，

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}-1$$

なので，$0<x<1$ のとき，図の β を用いて，

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$g'(x)$		＋	0	－	
$g(x)$	0	↗		↘	0



を得る．よって，，$0<x<1$ のとき，

$$g(x)>0$$

$$\therefore\ f(x)>x$$

よって，$0<a_n<1$ より，

$$f(a_n)>a_n$$

$$\therefore\ a_{n+1}>a_n$$

といえ，Ⓑは示される．

（証明終り）

(2)

$$b_n=\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=\frac{1-f(a_n)}{1-a_n} \quad \cdots ☆$$

ここで，$h(x)=\dfrac{1-f(x)}{1-x}$（$0<x<1$）とすると，

$$h'(x)=\frac{\{1-f(x)\}'(1-x)-\{1-f(x)\}(1-x)'}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{-f'(x)(1-x)+1-f(x)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{1-f(x)}{1-x}-f'(x)}{1-x}$$

ここで，$f(x)$ の平均値の定理より，

$$\frac{1-f(x)}{1-x}=f'(c) \quad \cdots ㋐$$

を満たす c が $0<x<c<1$ に存在する．また，$f'(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}$ は $0<x<1$ で単調減少関数なので，$0<x<c<1$ のとき，

$$f'(c)<f'(x) \quad \cdots ㋑$$

したがって，㋐㋑より，

$$\frac{1-f(x)}{1-x}<f'(x)$$

なので，$0<x<1$ のとき，

$$h'(x)<0$$

よって，$0<x<1$ のとき，

$h(x)$ は単調減少関数

なので，(1)より，$0<a_n<a_{n+1}<1$ であることと合わせて，

$$h(a_{n+1})<h(a_n)$$

$$\therefore\ \frac{1-f(a_{n+1})}{1-a_{n+1}}<\frac{1-f(a_n)}{1-a_n}$$

といえて，☆より，$b_{n+1}<b_n$ は示される．

（証明終り）

(3)　(2)より，

$$b_n \leqq b_1 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つので，$b_n=\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$ と合わせて，

$$\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}\leqq b_1$$

$$\therefore\ 1-a_{n+1}\leqq b_1(1-a_n)$$

が成り立つ．これより，十分に大きい n に対して，

$$1-a_n\leqq b_1^{\,n-1}(1-a_1)$$

$$\therefore\ 1-b_1^{\,n-1}(1-a_1)\leqq a_n$$

が成り立ち，これと，$0<a_n<1$ より，

$$1-b_1^{\,n-1}(1-a_1)\leqq a_n<1 \quad \cdots ★$$

ここで，$b_1=\dfrac{1-a_2}{1-a_1}$ であり，$0<a_1<a_2<1$ なので，

$$0<b_1<1$$

といえ，

$$\lim_{n\to\infty}\{1-b_1^{\,n-1}(1-a_1)\}=1$$

よって，★とはさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1 \quad \cdots(答)$$

このとき，☆において，$f(x)$ の平均値の定理より，

$b_n=f'(c_n)$ かつ $0<a_n<c_n<1$

を満たす c_n が存在し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ とはさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}c_n=1$$

よって，$f'(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}$ に注意して，

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}f'(c_n)=f'(1)=0 \quad \cdots(答)$$

5

$a>0$，$0<f(x)<1$ で，

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt = ax \quad \cdots①$$

$$f(0)=\frac{1}{3} \quad \cdots②$$

を満たすとき，

(1)
$$\frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)} = \frac{f'(t)}{1-f(t)} + \frac{f'(t)}{f(t)}$$

とかけるので，

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt \\
&= \int_0^x \left\{\frac{f'(t)}{1-f(t)} + \frac{f'(t)}{f(t)}\right\}dt \\
&= \Big[-\log\{1-f(t)\} + \log f(t)\Big]_0^x \\
&= -\log\{1-f(x)\} + \log\{1-f(0)\} + \log f(x) - \log f(0) \\
&= \log\frac{f(x)}{1-f(x)} + \log\frac{1-f(0)}{f(0)} \\
&= \log\frac{f(x)}{1-f(x)} + \log 2 \quad (\because ②) \\
&= \log\frac{2f(x)}{1-f(x)}
\end{aligned}$$

なので，①より，

$$\log\frac{2f(x)}{1-f(x)} = ax$$

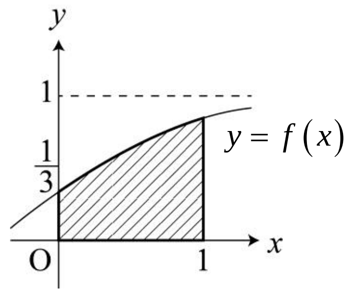
$$\therefore \frac{2f(x)}{1-f(x)} = e^{ax}$$

これより，

$$\left(2+e^{ax}\right)f(x) = e^{ax}$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^{ax}}{2+e^{ax}} \quad \cdots(答)$$

(2)　$0<f(x)<1$ より，求める面積 $S(a)$ は図の斜線部分で，



$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_0^1 f(x)dx \\
&= \int_0^1 \frac{e^{ax}}{2+e^{ax}}dx \\
&= \left[\frac{1}{a}\log\left(2+e^{ax}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{\log\left(2+e^{a}\right)-\log 3}{a} \quad \cdots(答)
\end{aligned}$$

ここで，$g(x)=\log\left(2+e^{x}\right)$ とおくと，$g(x)$ は微分可能で，

$$\lim_{a\to+0} S(a) = \lim_{a\to+0}\frac{g(a)-g(0)}{a} = g'(0)$$

いま，

$$g'(x) = \frac{e^x}{2+e^x}$$

なので，

$$\lim_{a\to+0} S(a) = g'(0) = \frac{1}{3} \quad \cdots(答)$$