1

$x>0$ のとき，$f(x)=2x+\dfrac{8}{x^2}$，$g(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x}$ について．

(1) さて，

$$f(x)-g(x)=-\frac{1}{2x^2}\left(x^4-4x^3+16x-16\right)$$
$$=-\frac{1}{2x^2}(x-2)^3(x+2)$$

とかけて，$x>0$ のとき，

$$-\frac{1}{2x^2}(x+2)<0$$

なので，

$$f(x)\geqq g(x) \iff (x-2)^3\leqq 0$$

したがって，求める x の範囲は，

$0<x\leqq 2$ …(答)

(2) (1)の議論から，$x>0$ のとき，

$$f(x)\geqq g(x) \iff 0<x\leqq 2$$
$$f(x)\leqq g(x) \iff x\geqq 2$$

したがって，$I=\displaystyle\int_1^4\left|f(x)-g(x)\right|dx$ とすると，

$$I=\int_1^2\{f(x)-g(x)\}dx+\int_2^4\{-f(x)+g(x)\}dx$$

また，$F(x)=\displaystyle\int\{f(x)-g(x)\}dx$ とおくと，

$$F(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2-\frac{8}{x}-8\log x$$

となり(積分定数は省略した)，

$$I=\Big[F(x)\Big]_1^2+\Big[-F(x)\Big]_2^4$$
$$=2F(2)-F(1)-F(4)$$

ここで，

$$F(2)=-\frac{4}{3}-8\log 2$$
$$F(1)=-\frac{43}{6}$$
$$F(4)=\frac{10}{3}-8\log 4=\frac{10}{3}-16\log 2$$

なので，

$I=\dfrac{7}{6}$ …(答)

2

$$2^{10}=1024 \quad \cdots ★$$
を用いて考える.

(1) $$\log_{10}2-0.3=\frac{1}{10}\left(10\log_{10}2-3\right)=\frac{1}{10}\log_{10}\frac{2^{10}}{10^3}$$
とできて，★より，
$$\frac{2^{10}}{10^3}=\frac{1024}{1000}=1+\frac{24}{1000}>1$$
したがって，$\log_{10}\dfrac{2^{10}}{10^3}>0$といえ，
$$\log_{10}2-0.3>0$$
$$\therefore 0.3<\log_{10}2$$
(証明終り)

(2) $$(1100)^2<2^{-3}\cdot 10^n$$
$$\Leftrightarrow \quad 8\cdot 11^2\cdot 10^4<10^n$$
$$\Leftrightarrow \quad 968<10^{n-4}$$
なので，求める最小の自然数 n は，
$$n=7 \quad \cdots(答)$$

(3) (2)より，
$$(1100)^2<2^{-3}\cdot 10^7 \quad \cdots①$$
が成り立つ．さらに，★より，$2^{10}<1100$がいえて，
$$2^{20}<(1100)^2 \quad \cdots②$$
である．よって，①②より，
$$2^{20}<2^{-3}\cdot 10^7$$
$$\therefore 2^{23}<10^7$$
がいえて，
$$2<10^{\frac{7}{23}}$$
すなわち，
$$\log_{10}2<\frac{7}{23} \quad \cdots③$$
さらに，
$$0.305-\frac{7}{23}=\frac{305\times 23-7000}{23000}=\frac{15}{23000}>0$$
なので，
$$\frac{7}{23}<0.305 \quad \cdots④$$
以上③④より，
$$\log_{10}2<0.305$$
(証明終り)

3

$$l:(1+7a)x+(7-a)y+5a-5=0$$

(1) l の式は,

$$a(7x-y+5)+x+7y-5=0$$

ともかける. よって, l が a の値によらず通る点 A の座標は,

$7x-y+5=0$ かつ $x+7y-5=0$

$$\therefore (x,\ y)=\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right) \quad \cdots(\text{答})$$

(2)<u>解答①</u>

$a>0$ のとき, l が通過する領域 D について考える.
さて, l は,

(i) $a=7$ のとき,

$$50x+30=0$$
$$\therefore x=-\frac{3}{5}$$

(ii) $a\neq 7$ のとき,

$$y=\frac{7a+1}{a-7}x+\frac{5a-5}{a-7} \quad \cdots Ⓐ$$

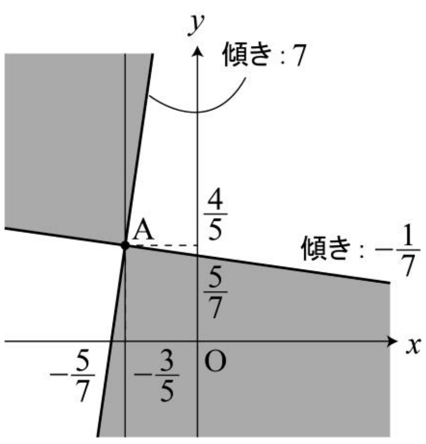
と表せる.
ここで, Ⓐの傾きを m とすると,

$$m=\frac{7a+1}{a-7}=7+\frac{50}{a-7}$$

と表せ, $0<a<7$, $7<a$ のとき, m は,

$$m<-\frac{1}{7},\ 7<m$$

の範囲をくまなく動く.
これと, (1)の結果より, 領域 D は図の灰色部分で, 境界は点 A を含み, その他は除く.



(解答終り)

<u>解答②</u>

$a>0$ のとき, l が通過する領域 D について, 点 $(x,\ y)$ が D に属する条件は,

$$a(7x-y+5)+x+7y-5=0 \quad \cdots ★$$

を満たす実数 a が $a>0$ に存在すること.

(ア) $7x-y+5=0$ のとき,

$$★ \iff a\cdot 0=-x-7y+5$$

なので, 求める条件は,

$7x-y+5=0$ かつ $-x-7y+5=0$

$$\therefore (x,\ y)=\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

(イ) $7x-y+5\neq 0$ のとき,

$$★ \iff a=\frac{-x-7y+5}{7x-y+5}$$

なので, 求める条件は,

$$\frac{-x-7y+5}{7x-y+5}>0$$

$$\therefore \begin{cases}-x-7y+5>0\\ 7x-y+5>0\end{cases} \text{または} \begin{cases}-x-7y+5<0\\ 7x-y+5<0\end{cases}$$

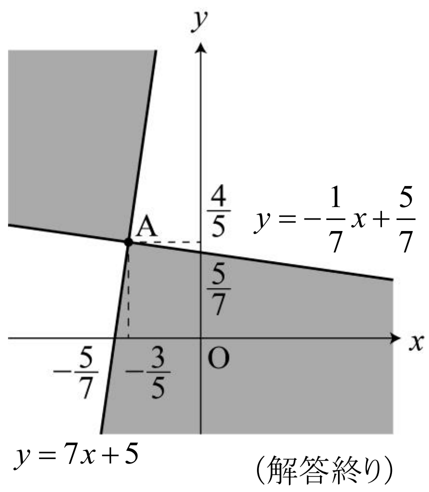
すなわち,

$$\begin{cases}y<-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{5}{7}\\ y<7x+5\end{cases}$$

または

$$\begin{cases}y>-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{5}{7}\\ y>7x+5\end{cases}$$

以上より, 求める D は図の灰色部分で, 境界は点 A を含み, その他は除く.



(解答終り)

4

(1) $f(x)=x^2-3x$とおくと，$C_1: y=f(x)$上の点$(a,\ f(a))$におけるC_1の接線l_aの方程式は，

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$\therefore\ y=(2a-3)x-a^2\quad\cdots★\quad\cdots(\text{答})$$

とかける．また，これは，

$$(2a-3)x-y-a^2=0$$

ともかけるから，接線l_aと原点の距離$d(a)$は，

$$d(a)=\frac{\left|(2a-3)\cdot 0-0-a^2\right|}{\sqrt{(2a-3)^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-12a+10}}\quad\cdots(\text{答})$$

(2) (1)の接線l_aと$C_2: x^2+y^2=r^2$ ($r>0$)が接する条件は，(1)の$d(a)$を用いて，

$$d(a)=r\quad\cdots◆$$

また，★より，aの値と接線l_aは1対1対応なので，求める条件は，◆を満たす実数aが異なる4つ存在すること．ところで，

$$d'(a)=\frac{2a\cdot\sqrt{4a^2-12a+10}-a^2\cdot\dfrac{4a-6}{\sqrt{4a^2-12a+10}}}{4a^2-12a+10}$$

$$=\frac{2a\left(4a^2-12a+10\right)-a^2(4a-6)}{\left(4a^2-12a+10\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2a(a-2)(2a-5)}{\left(4a^2-12a+10\right)^{\frac{3}{2}}}$$

なので，

a	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$d'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$d(a)$	↘	0	↗	$2\sqrt{2}$	↘	$\frac{5\sqrt{5}}{4}$	↗

を得る．これと，

$$\lim_{a\to\pm\infty}d(a)=\infty$$

であることより，求めるrの範囲は，

$$\frac{5\sqrt{5}}{4}<r<2\sqrt{2}\quad\cdots(\text{答})$$