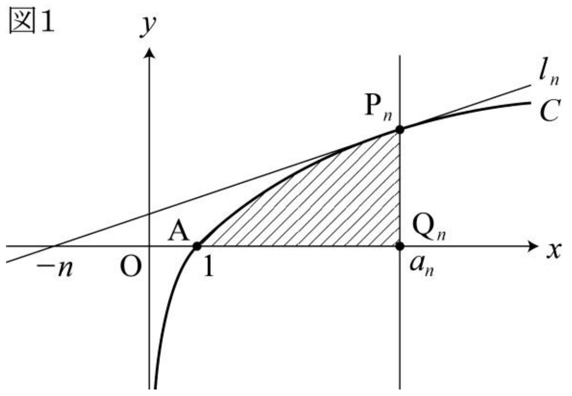
問題1

図1



$f(x)=\log x$とする.

点P_n（a_n, $f(a_n)$）（$a_n>0$）における$C: y=f(x)$の接線をl_nとする. このとき, l_nは,

$$y-f(a_n)=f'(a_n)(x-a_n)$$

$$\therefore y=\frac{1}{a_n}x-1+\log a_n$$

l_nが, 点$(-n, 0)$を通る条件は,

$$0=\frac{1}{a_n}(-n)-1+\log a_n$$

$$\therefore n=a_n\log a_n-a_n \quad \cdots★$$

このとき, nは0以上の整数で,

$$n=a_n(\log a_n-1)\geqq 0$$

なので,

$$a_n\geqq e$$

が成り立つ.

問1　a_0は, ★で$n=0$として,

$$0=a_0\log a_0-a_0$$

を満たす. いま, $a_0>0$なので,

$$0=\log a_0-1$$

$$\therefore a_0=e \quad \cdots(答)$$

問2　求める面積S_nは図1の斜線部の面積で,

$$S_n=\int_1^{a_n}f(x)dx$$

$$=\int_1^{a_n}\log x dx$$

$$=\left[x\log x-x\right]_1^{a_n}$$

$$=a_n\log a_n-a_n+1$$

とかける. これと★より,

$$S_n=n+1 \quad \cdots(答)$$

問3(1)　$L_1=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$とする.

問2より, $S_n=n+1$, $S_{n+1}=n+2$なので,

$$S_{n+1}-S_n=1$$

したがって,

$$\int_1^{a_{n+1}}f(x)dx-\int_1^{a_n}f(x)dx=1$$

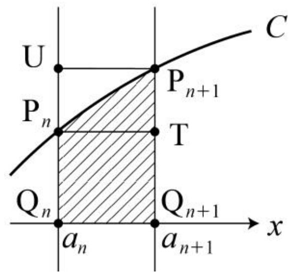
$$\therefore \int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)dx=1>0$$

であり, $e\leqq a_n\leqq x\leqq a_{n+1}$において,

$f(x)>0$なので,

$$a_n<a_{n+1}$$

図2



よって, 図2において,

斜線部分

長方形$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{T}$

長方形$\mathrm{UQ}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$

の面積の大きさを比較して,

$$(a_{n+1}-a_n)\log a_n<S_{n+1}-S_n<(a_{n+1}-a_n)\log a_{n+1}$$

$$\therefore (a_{n+1}-a_n)\log a_n<1<(a_{n+1}-a_n)\log a_{n+1} \quad \cdots☆$$

が成り立つ. いま, $e\leqq a_n<a_{n+1}$より,

$$0<\log a_n<\log a_{n+1}$$

がいえるので, ☆より,

$$\frac{1}{\log a_{n+1}}<a_{n+1}-a_n<\frac{1}{\log a_n}$$

これと, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$を考えると, はさみうちの原理より,

$$L_1=0 \quad \cdots(答)$$

(2)　$L_2=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\log a_n}{n}$とする.

★より,

$$\frac{a_n\log a_n}{n}=\frac{a_n\log a_n}{a_n(\log a_n-1)}=\frac{1}{1-\frac{1}{\log a_n}}$$

とかけて, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$も考えて,

$$L_2=1 \quad \cdots(答)$$

問3(1)の別解

$g(x)=x\log x-x$として，★より，

$$g(a_{n+1})=n+1 \text{かつ} g(a_n)=n \quad \cdots①$$

が成り立つ．ここで，

$x \geqq e$のとき，$g'(x)=\log x>0$

なので，

$x \geqq e$のとき，$g(x)$は単調増加

これと，$a_n \geqq e$，①より，

$$a_n<a_{n+1}$$

また，①より，

$$g(a_{n+1})-g(a_n)=1 \quad \cdots②$$

も成り立つ．これより

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\dfrac{g(a_{n+1})-g(a_n)}{a_{n+1}-a_n}}$$

とできる．このとき，$g(x)$の平均値の定理より，

$$\frac{g(a_{n+1})-g(a_n)}{a_{n+1}-a_n}=g'(c_n) \text{かつ} a_n<c_n<a_{n+1}$$

を満たすc_nが存在し，

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{g'(c_n)}=\frac{1}{\log c_n}$$

とかける．いま，$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$なので，$a_n<c_n<a_{n+1}$より，

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\infty$$

したがって，

$$L_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log c_n}=0 \quad \cdots(\text{答})$$

問題2

図1

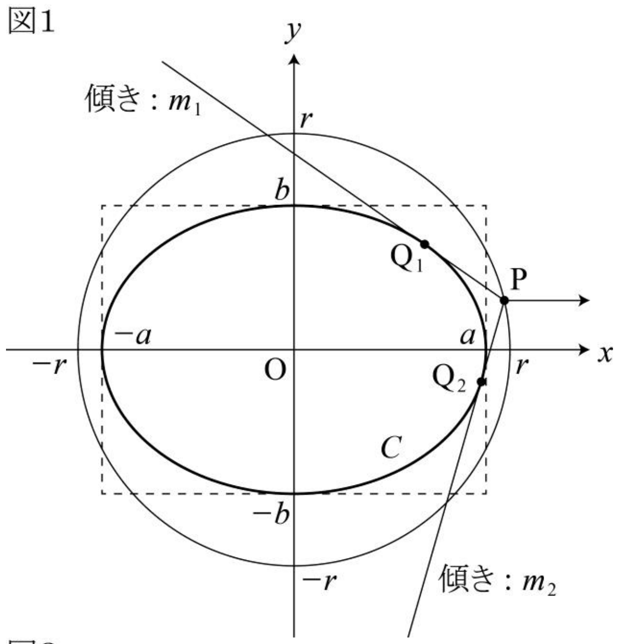
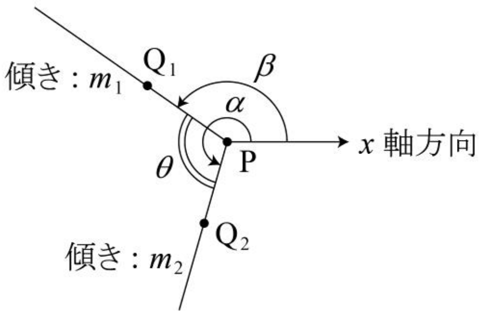


図2



問1　点 $\mathrm{P}(p,\ q)$（$p>a$，$q \geqq 0$）から楕円 C に引いた接線は，図1のように2本存在し，ともに y 軸に平行ではないので，

$$y=mx+n$$

とおけ，

$$q=mp+n$$

$$\therefore n=q-mp \quad \cdots㋐$$

を満たす．このとき，C と $y=mx+n$ の共有点の x 座標は，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1$$

$$\therefore \left(m^2a^2+b^2\right)x^2+2mna^2x+a^2\left(n^2-b^2\right)=0 \quad \cdots☆$$

を満たす．よって，C と $y=mx+n$ が接することより，

$$(☆の判別式)=0$$

$$\therefore m^2n^2a^4-a^2\left(n^2-b^2\right)\left(m^2a^2+b^2\right)=0$$

すなわち，

$$a^2b^2\left(a^2m^2-n^2+b^2\right)=0$$

$$\therefore a^2m^2-n^2+b^2=0 \quad (\because a>0,\ b>0) \quad \cdots㋑$$

が成り立つ．したがって，㋐㋑より，

$$a^2m^2-(q-mp)^2+b^2=0$$

$$\therefore \left(p^2-a^2\right)m^2-2pqm+q^2-b^2=0 \quad \cdots★$$

★を満たす異なる2つの m の値が，m_1，m_2（$m_1<m_2$）といえ，解と係数の関係より，

$$m_1+m_2=\frac{2pq}{p^2-a^2},\quad m_1m_2=\frac{q^2-b^2}{p^2-a^2} \quad \cdots(答)$$

問2(1)　図2のように α，β をとると，

$$\tan\alpha=m_2,\quad \tan\beta=m_1,\quad \theta=\alpha-\beta$$

である．これより，

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1} \quad \cdots①$$

とかける．ここで，$m_1<m_2$ より，

$$m_2-m_1=\sqrt{\left(m_2-m_1\right)^2}=\sqrt{\left(m_1+m_2\right)^2-4m_1m_2}$$

とできて，**問1**，$0<a<p$ に注意すると，

$$m_2-m_1=\sqrt{\left(\frac{2pq}{p^2-a^2}\right)^2-4\cdot\frac{q^2-b^2}{p^2-a^2}}$$

$$=\frac{2}{p^2-a^2}\sqrt{p^2q^2-\left(p^2-a^2\right)\left(q^2-b^2\right)}$$

$$=\frac{2}{p^2-a^2}\sqrt{a^2q^2+b^2p^2-a^2b^2} \quad \cdots②$$

また，

$$1+m_1m_2=\frac{p^2-a^2+q^2-b^2}{p^2-a^2}=\frac{p^2+q^2-\left(a^2+b^2\right)}{p^2-a^2}$$

であり，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は円 $x^2+y^2=r^2$ 上にあることより，

$$p^2+q^2=r^2$$

を満たすから，

$$1+m_1m_2=\frac{r^2-\left(a^2+b^2\right)}{p^2-a^2} \quad \cdots③$$

となる．よって，①②③より，

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{a^2q^2+b^2p^2-a^2b^2}}{r^2-\left(a^2+b^2\right)} \quad \cdots(答) \quad \cdots◆$$

さらに，$0<r<\sqrt{a^2+b^2}$ より，

$$\tan\theta<0$$

よって，$\angle \mathrm{Q}_1\mathrm{P}\mathrm{Q}_2=\theta$ は鈍角といえる．

（証明終り）

(2)　$\mathrm{P}(r,\ 0)$ における θ について，◆で $(p,\ q)=(r,\ 0)$ として，

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{b^2\left(r^2-a^2\right)}}{r^2-\left(a^2+b^2\right)}$$

が成り立つ．ここで，$r\to\sqrt{a^2+b^2}-0$ としたとき，

$$r^2-\left(a^2+b^2\right)\to -0$$

$$2\sqrt{b^2\left(r^2-a^2\right)}\to 2b^2$$

であるから，

$$\lim_{r\to\sqrt{a^2+b^2}-0}\tan\theta=-\infty$$

これと，**問2**(1)より，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であることから，

$$\lim_{r\to\sqrt{a^2+b^2}-0}\theta=\frac{\pi}{2} \quad \cdots(答)$$

問題3

$C: y = x^2$

$E_n: y = -x^2 - 2nx + 4n^2$

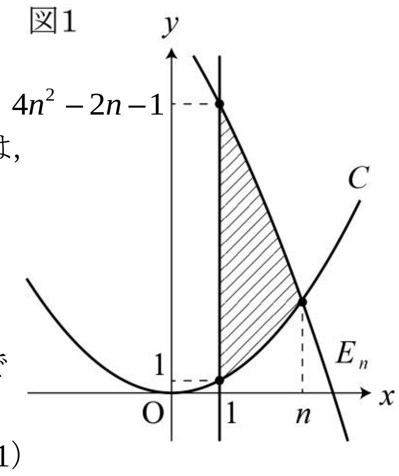
とすると，C と E_n の共有点の x 座標は，

$x^2 = -x^2 - 2nx + 4n^2$

$\therefore x = -2n,\ n$

よって，領域 D_n は図1の斜線部分．

図1



問1　D_2 に含まれる格子点は，図1で $n = 2$ として，

$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，……，$(1,\ 11)$

$(2,\ 4)$

となるから，

$a_2 = 12$　…（答）

問2　$n \geqq 3$ のとき，領域 D_n に含まれる直線 $x = k$（$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）上の格子点は，

$(k,\ k^2)$，$(k,\ k^2+1)$，……，$(k,\ -k^2-2nk+4n^2)$

で，その個数を p_k とすると，

$$p_k = \left(-k^2 - 2nk + 4n^2\right) - k^2 + 1$$
$$= -2k^2 - 2nk + 4n^2 + 1$$

よって，

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(-2k^2 - 2nk + 4n^2 + 1\right)$$
$$= -2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2n\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + \left(4n^2+1\right)n$$
$$= \frac{1}{3}n\left(7n^2 - 6n + 2\right)\quad\cdots\text{（答）}$$

問3（1）　図1より，求める面積 S_n は，

$$S_n = \int_1^n \left\{\left(-x^2 - 2nx - 4n^2\right) - x^2\right\}dx$$
$$= \int_1^n \left\{-2(x+2n)(x-n)\right\}dx$$
$$= \int_{1-n}^0 \left\{-2(x+3n)x\right\}dx$$
$$= \int_{1-n}^0 \left(-2x^2 - 6nx\right)dx$$
$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 - 3nx^2\right]_{1-n}^0$$
$$= \frac{2}{3}(1-n)^3 + 3n(1-n)^2$$
$$= \frac{1}{3}(n-1)^2\left\{-2(n-1) + 9n\right\}$$
$$= \frac{1}{3}(n-1)^2(7n+2)\quad\cdots\text{（答）}$$

（2）　領域 D_n の周上の格子点は，

直線 $x = 1$ 上，曲線 C 上，曲線 E_n 上

の順に数えて，

$$\left(4n^2 - 2n - 1\right) + (n-1) + (n-2) = 4n^2 - 4\ \text{（個）}$$

よって，

$$b_n = 4n^2 - 4$$

したがって，

$$S_n - \left(a_n - \frac{1}{2}b_n - 1\right)$$
$$= \frac{1}{3}(n-1)^2(7n+2) - \left\{\frac{1}{3}n\left(7n^2 - 6n + 2\right) - \frac{1}{2}\left(4n^2 - 4\right) - 1\right\}$$
$$= \frac{n-1}{3}$$

なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n - \left(a_n - \frac{1}{2}b_n - 1\right)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \frac{1}{n}}{3} = \frac{1}{3}\quad\cdots\text{（答）}$$

問題4

p は実数で，

$$2^p = 3 \quad \cdots ★$$

を満たす．

問1　p が無理数であることを背理法で示す．

★より，$p>0$ である．そこで，p が有理数であるとすると，

$$p=\frac{n}{m} \quad (m,\ n \text{ は互いに素な自然数})$$

とおける．このとき，

$$2^{\frac{n}{m}}=3$$
$$\therefore 2^n = 3^m$$

となり，m，n は自然数より，

（偶数）＝（奇数）

といえ，矛盾が生じる．よって，

p は無理数

また，

$$\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 2^3 = 8, \quad 3^2 = 9$$

なので，

$$2^{\frac{3}{2}} < 3 = 2^p$$

さらに，

$$\left(2^{\frac{8}{5}}\right)^5 = 2^8 = 256, \quad 3^5 = 243$$

なので，

$$2^p = 3 < 2^{\frac{8}{5}}$$

以上より，

$$2^{\frac{3}{2}} < 2^p < 2^{\frac{8}{5}}$$
$$\therefore \frac{3}{2} < p < \frac{8}{5}$$

（証明終り）

問2　$9^{y-1} = 3^{2y-2}$

なので，★より，

$$\begin{cases} 2^{x+y-2} = 9^{y-1} \\ 2^{2x-1} = 3^{3x-y+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+y-2} = 3^{2y-2} \\ 2^{2x-1} = 3^{3x-y+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+y-2} = 2^{p(2y-2)} \\ 2^{2x-1} = 2^{p(3x-y+1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2 = p(2y-2) \\ 2x-1 = p(3x-y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (2p-1)y-2p+2 \\ (2-3p)x+py = p+1 \end{cases}$$

これより，

$$(6p^2-8p+2)y = 6p^2-11p+3$$
$$\therefore 2(3p-1)(p-1)y = (3p-1)(2p-3)$$

を得て，$\frac{3}{2} < p < \frac{8}{5}$ より，$(3p-1)(p-1) \neq 0$ で

$$y = \frac{2p-3}{2(p-1)}$$

これと，$x=(2p-1)y-2p+2$ より，

$$(x,\ y) = \left(-\frac{1}{2(p-1)},\ \frac{2p-3}{2(p-1)}\right) \quad \cdots（答）$$

問3　問2と同様にして，

$$\begin{cases} 2^{x+y-2} = 9^{y-a} \\ 2^{2x-b} = 3^{3x-y+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2 = p(2y-2a) \\ 2x-b = p(3x-y+1) \end{cases} \quad \cdots ☆$$

ここで，☆を満たす有理数 x，y が存在するとき，$2y-2a \neq 0$ とすると，

$$\frac{x+y-2}{2y-2a} = p$$

となり，a，b が有理数であることと合わせて，

$$\frac{x+y-2}{2y-2a} = （有理数）$$

といえ，「p は無理数」であることに矛盾する．よって，

$$2y-2a=0 \quad \cdots ①$$

このとき，

$$x+y-2=0 \quad \cdots ②$$

同様にして，

$$3x-y+1=0 \quad \cdots ③$$
$$2x-b=0 \quad \cdots ④$$

がいえる．①②③④より，

$$(x,\ y) = \left(\frac{1}{4},\ \frac{7}{4}\right), \quad (a,\ b) = \left(\frac{7}{4},\ \frac{1}{2}\right)$$

また，$(a,\ b) = \left(\frac{7}{4},\ \frac{1}{2}\right)$ のとき，$(x,\ y) = \left(\frac{1}{4},\ \frac{7}{4}\right)$ とすると，☆は成り立つ．以上より，

$$(a,\ b) = \left(\frac{7}{4},\ \frac{1}{2}\right) \quad \cdots（答）$$